

WELLENDIGITALFILTER MIT LEISTUNGSWELLEN

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

SHENKE ZHANG

Shanghai / China

Bochum 1988



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543113_0026

WELLENDIGITALFILTER MIT LEISTUNGSWELLEN

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

SHENKE ZHANG

Shanghai / China

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am: 6. Juni. 1988

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli. 1988

Referent: Prof. Dr. sc. techn. Dr. h. c. A. Fettweis

Korreferent: Prof. Dr. -Ing. K. Meerkötter

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1.	Einleitung	5
2.	Spannungswellen und Leistungswellen	10
2.1	Bestandteile in Leistungswellen-Darstellung	10
2.2	Strukturorientierte Matrix für das Digitalfilter-Netzwerk ...	28
2.2.1	Definition einiger Vektoren	28
2.2.2	Analyse eines zeitdiskreten Systems	37
2.2.3	Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realisier- barkeit von Digitalfiltern	39
2.2.4	Digitale Nachbildung einer Kreuzschaltung (nicht kanonische Realisierung)	43
2.2.5	Eine allgemeine Realisierungsmethode für Digitalfilter	57
2.2.6	Berechnung der Übertragungsfunktion der Digitalfilter im Frequenzbereich	65
2.3	Aufbau der Adaptoren von Wellendigitalfiltern	67
3.	Stabilitätseigenschaften von Wellendigitalfiltern in Leis- tungswellen-Darstellung	73
3.1	Eigenschaften der Bausteine unter Verwendung von Leistungs- wellen	74
3.2	Eigenschaften der Struktur-Matrix von PWDF	76
3.3	Systemeigenschaften von PWDF	78
3.4	Antwortstabilität, Schleifenstabilität und grenzzyklus- schwingungenfreie Stabilität von PWDF	88
4.	Reziprozität und Dualität usw. von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung	96
4.1	Reziprozitätseigenschaft von PWDF	96
4.2	Interpretation der Dualitätsbeziehung unter Verwendung von Leistungswellen	97
4.3	Interpretation der Kuroda-Identitäten unter Verwendung von Leistungswellen	104

5.	Untersuchung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen	112
5.1	Ermittlung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen	112
5.2	Passivität und Empfindlichkeit	122
5.3	Empfindlichkeiten der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen	125
6.	Diskrete Optimierung der Multiplizierer-Koeffizienten von Wellendigitalfiltern mit Leistungswellen	130
6.1	Statistische Abschätzung der erforderlichen Wortlänge der Multiplizierer-Koeffizienten	130
6.1.1	Abschätzung der erforderlichen Wortlänge von PWDF, deren Parameter unabhängig voneinander sind	131
6.1.2	Abschätzung der erforderlichen Wortlänge von PWDF, deren Parameter abhängig voneinander sind	135
6.2	Diskrete Optimierung der Multiplizierer-Koeffizienten von PWDF	137
6.2.1	Berechnung der Übertragungsfunktion bei der Optimierung mit Hilfe der Zustandsdarstellung	138
6.2.2	Beschreibung des diskreten Optimierungsalgorithmus	140
7.	Vergleich von Rauschen, Dynamik und Grenzyklusschwingungen bei Wellendigitalfiltern, die unter Verwendung von Spannungswellen bzw. Leistungswellen hergeleitet werden	149
7.1	Ermittlung des Signalrauschverhältnisses von Digitalfiltern	149
7.1.1	Rauschquellen in Wellendigitalfiltern	149
7.1.2	Berechnung des Signalrauschverhältnisses von WDF	151
7.2	Bestimmung der Skalierungsfaktoren	173
7.3	Vergleich durch Simulation und theoretische Analyse	185
8.	Zusammenfassung	195
	Literaturverzeichnis	198

1. EINLEITUNG

Die stürmische Entwicklung der Integrationstechnik in der Mikroelektronik in den letzten Jahren führte auf dem Gebiet der Elektrotechnik zu neuen Fortschritten von entscheidender Bedeutung. Dabei haben die Digitalfilter bekanntlich zunehmend an Bedeutung für die Signalverarbeitung und für die Nachrichtenübertragung gewonnen. Die neuen Digitalfilter-Strukturkonzepte werden derzeit immer häufiger durch Fortschritte bei der Integration stets komplexerer Baugruppen in digitalen Großschaltkreisen oder durch eine geeignete Vereinfachungen für die integrierte Schaltungstechnologie bei der Herstellung der Zusammenschaltung sichtbar. Unter den bereits vorkommenden zahlreichen Digitalfilterstrukturen besitzen die Wellendigitalfilter, die von A. Fettweis vorgeschlagen wurden [1], viele attraktive vorteilhafte Eigenschaften. Ein Aufsatz von A. Fettweis [2], in dem die Theorie und Praxis von Wellendigitalfiltern vollständig beschrieben sind, wurde z.B. 1986 veröffentlicht. Wellendigitalfilter (WDF) können breiteste Anwendung finden, falls ihre Simulation richtig durchgeführt wird. Hierbei ist der detaillierte mathematische Ausdruck bei der Simulation für WDF besonders wichtig, so daß bereits dadurch deutlich wird, daß WDF eigentlich eine digitale Nachbildung von Analogfiltern sind.

Die Wellendigitalfilter, die beidseitig resistiv abgeschlossene verlustfreie Abzweigfilter nachbilden [1], besitzen geringere Koeffizientenempfindlichkeit gegenüber anderen Digitalfilterkonzepten [3], [4]. Daher ist die Untersuchung von WDF dieses Typs besonders nützlich. Außerdem wird dadurch nicht ausgeschlossen, auch andere beidseitig resistiv abgeschlossene verlustfreie Analogfilter (z.B. *Kreuzschaltung*, *Brücken-T-Filter* usw.) nachbilden zu können, wobei die Leitungselemente eine große Rolle beim Übergang zu einem realisierbaren WDF spielen. Wegen der ausgezeichneten Stabilität, des günstigen Dynamikbereiches und der geringeren Empfindlichkeit von WDF [5] stellt sich deshalb die Aufgabe, spezielle Hardware aufzubauen bzw. entsprechende Software zu entwickeln. Die Untersuchung von Wellendigitalfiltern, die sich insbesondere für ideale VLSI-Architekturen eignen, hat so große Bedeutung für die Realisierung von Wellendigitalfiltern. Ausgehend von Wirtschaftlichkeitsgründen und von der Zuverlässigkeit von Systemen, werden VLSI-Komponenten in zunehmender Zahl zum Einsatz kommen. Die

verschiedenen Typen von Adaptoren, die die wichtigsten Bausteine bei der Realisierung von Wellendigitalfiltern sind, können auf einen einzigen Typus reduziert werden, wenn die Beschreibung der Adaptoren durch Leistungswellen erfolgt [6]. Diese Reduzierung vermindert den Aufwand bei integrierten Schaltungen. Das wirkt sich günstig auf die Realisierung der Zusammenschaltung von Wellendigitalfiltern aus, zumal für die Massenproduktion (Hardware). z.B. durch die Verdrahtung eines Standard-Baustein Typs (Adaptor) ein beliebiges Wellendigitalfilter realisiert werden kann. Es ist auch möglich, durch einfache Änderung der Verdrahtung der Adaptoren oder Änderung der Koeffizienten eine Menge verschiedene Wellendigitalfilter zu realisieren, die den verschiedenen gegebenen Anforderungen entsprechen. Die Realisierung von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung kann mit **Gatter-Matrizen** (Gate-Arrays) oder mit **Standardzellen** erleichtert werden. D.h., daß damit bei Änderungen in der Fertigung die Flexibilität erhöht und eine kürzere Zeitspanne bis zur Chip-Auslieferung ermöglicht wird. Außerdem kann jeder einzelne Adaptor durch eine orthogonale Matrix dargestellt werden. Man bezeichnet einen solchen Adaptor auch als **CORDIC**. Es entsteht damit die Möglichkeit, Wellendigitalfilter mit Hilfe eines sogenannten **CORDIC**-Prozessors zu realisieren [2], [6], [7], [55]. Da also die Verwendung von Leistungswellen-Ansätzen bei höheren Frequenzen im Netzwerk günstiger ist als Ansätze von Spannungswellen [14], erscheint es besonders nützlich, die Wellendigitalfilter unter Verwendung von Leistungswellen zu untersuchen [83].

Bei der Realisierung von **PWDF** (diese Abkürzung sei im Folgenden für Wellendigitalfilter in Leistungswellen-Darstellung gewählt [8]) weist jeder Adaptor mehr Multiplizierer auf als bei der Realisierung von **VWDF** (Abkürzung für Wellendigitalfilter in Spannungswellen-Darstellung [8]). Das ist eigentlich ein Nachteil der **PWDF**. Darunter ist ein Typ (der Unterschied zwischen den Typen ist durch den Multiplizierer-Koeffizienten gegeben) der Multiplizierer jedes Adaptors abhängig von anderen Multiplizierern, damit auf der einen Seite die Stabilität (bestimmt durch das am meisten verlustbehaftete System unter endlicher Arithmetik) sichergestellt ist, auf der anderen Seite jedoch diese Multiplizierer einstellbar sind. Diese Forderung ist sinnvoll für die Einhaltung der Passivitätseigenschaft bei der Optimierung von **PWDF** und für die Entwicklung adaptiver **PWDF**. Durch Optimierung kann also die Stabilität

von PWDF in jedem Teil bis hin zum ganzen System sichergestellt wird (äußere und innere Stabilität). Die Simulation von PWDF im Zeitbereich erweist die ausgezeichneten Eigenschaften in Bezug auf die innere Stabilität, die orthogonale Digitalfilter besitzen. Außerdem kann die modulare Struktur von PWDF, wie oben erwähnt, nicht nur in Kaskade-Schaltungen, sondern auch in den komplizierteren Schaltungen verwendet werden.

Im Anschluß an diese in Kapitel 1 gegebene Einleitung werden in Kapitel 2 die Definitionen für einige Elemente, die Quelle und die Definition von Adaptoren unter Verwendung von Leistungswellen eingeführt, um damit die Bauelemente der Analogfilter in die Bestandteile des Wellenflußdiagramms abbilden zu können. Komplette WDF bestehen aus der Zusammenschaltung solcher Bestandteile. Um das gewünschte Verhalten von WDF durch solche Zusammenschaltung zu erzielen, wird eine Methode zur Analyse, Berechnung und Simulation vorgestellt. Da Wellendigitalfilter eigentlich eine Nachbildung von Analogfiltern sind, haben die daraus gezogenen Schlußfolgerungen allgemeine Bedeutung. Anhand einiger Beispiele konnte dies nachgewiesen werden. Dabei werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, die die Basis der Simulation schaffen und für die Realisierbarkeit der Digitalfilter durch mathematisch geschlossene Ausdrücke quantitativ beschreibbar sind. Dies gilt sowohl für Kaskade-Schaltungen, als auch für andere komplizierte Schaltungen, etwa multivariable sowie multidimensionale Schaltungen. Hierfür werden einige Beispiele ausgeführt. Mit Hilfe dieser so geschaffenen Methodik werden dann die Untersuchungen von PWDF durchgeführt.

In Kapitel 3 wird die Stabilität von PWDF, die für den Entwurf von Digitalfiltern vorrangige Aufgabe und bei der Realisierung von WDF deren hervorragende Eigenschaft ist, für jeden einzelnen Baustein bis hin zum gesamten System nachgewiesen. Dabei handelt es sich um die Analyse der Systemmatrix und die Stabilität auch unter nichtlinearen Bedingungen, insbesondere um die innere Stabilität unter endlicher Arithmetik. Hierbei wird die Stabilität bei der Realisierung wegen der Passivität jedes Bausteins (einschließlich der Adaptoren), durch die geeignete Auswahl eines abhängigen Multiplizierers und zusätzliche Operationen an den Ausgängen des Adaptors erreicht und sichergestellt, so daß sowohl parasitäre Schwingungen vermieden

werden können, als auch das Auftreten von Antwortinstabilität und Schleifeninstabilität schon vom Prinzip her ausgeschlossen werden. Bei der Optimierung wird der Dämpfungsverlauf von PWDF im Frequenzbereich wegen der Funktion der abhängigen Multiplizierer in jedem Adaptor als passiv betrachtet. Diese Eigenschaft wirkt sich günstig auf den Dynamikbereich im Zeitbereich aus, ganz im Gegensatz zu den in VWDF erforderlichen Maßnahmen der Benutzung der reziproker Multiplizierer. Der Dämpfungsverlauf ist unabhängig von Torwiderständen, sowohl für die Zusammenschaltung als auch für jeden Baustein bzw. Adaptor. Im Zeitbereich haben die inneren Signale in PWDF die typischen stabileren Werte orthogonaler Digitalfilter [10], so daß selten Überläufe vorkommen. In gewissem Sinne erlaubt also die Struktur der orthogonalen Digitalfilter bzw. PWDF die Verwirklichen eines überlaufstabilen Betriebs, wenn das Digitalfilter vom Ruhezustand ausgehend betrieben wird und jedes Eingangssignal, das im verfügbaren Zahlenbereich darstellbar ist, zugelassen wird.

In Kapitel 4 wird eine Analyse der Dualität und Reziprozität im Wellenflußdiagramm durch die Einführung von Leistungswellen durchgeführt. Die Äquivalenzbeziehungen im klassischen Netzwerk können im Wellenflußdiagramm dargestellt werden. So sind die am meisten interessanten Eigenschaften leicht zu erkennen. *Z.B. äquivalente Zweitore im klassischen Netzwerk äquivalente Strukturen im Wellenflußdiagramm.* Daraus kann man auch andere Äquivalenzbeziehungen folgern. Daher erweisen sich wiederum Wellendigitalfilter als eine übereinstimmende Nachbildung von Analogfiltern.

Kapitel 5 enthält die Beschreibung der Berechnung für die oben begründete Empfindlichkeit der Multiplizierer-Koeffizienten sowohl für Wellendigitalfilter als auch für andere Digitalfilter, wenn das digitale Netzwerk durch eine Struktur-Matrix beschrieben wird. Anschließend werden für Wellendigitalfilter der Zusammenhang zwischen Dämpfung und Empfindlichkeit sowie die Abhängigkeit der Empfindlichkeit gegenüber Änderung der Multiplizierer-Koeffizienten untersucht. Weil die PWDF nur einen Typ der abhängigen Multiplizierer in jedem Adaptor benötigt, läßt sich die Passivitätseigenschaft aus dem Dämpfungsverlauf betrachten ablesen.

In Kapitel 6 wird eine Abschätzung der erforderlichen Wortlänge der

Multiplizierer-Koeffizienten sowie eine Methode zur Optimierung von PWDF mit Hilfe der Berechnung der Empfindlichkeit gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen vorgestellt. Wegen der höheren Genauigkeit bei der Berechnung der Empfindlichkeit der Multiplizierer-Koeffizienten ist die hierauf aufgebaute Optimierungsmethode auch effektiv [9], [77]. Die durch Optimierung erhaltene Wortlänge für Multiplizierer-Koeffizienten bei PWDF ist länger als bei VWDF, so daß die Realisierung von PWDF mehr Multiplizierer als die von VWDF benötigt. Das ist zwar ein Nachteil von PWDF, jedoch treten bei PWDF wenige Überläufe im Zeitbereich auf als bei VWDF. Dabei werden dann auch noch die Stabilitätseigenschaften von PWDF sowohl in der theoretischen Analyse als auch in der Realisierung zusätzlich garantiert. Das hängt mit der inneren Stabilität und der äußeren Stabilität zusammen. Wegen ganz unterschiedlicher Anforderungen (z.B. *Kosten, Anforderungen an das Produkte, Verhalten im Frequenzbereich und im Zeitbereich*) werden jedoch meist sowohl PWDF, wie auch VWDF zur Verfügung gestellt.

In Kapitel 7 läßt sich dann die quantitative Analyse des Einflusses der Wortlängebegrenzung zwanglos anschließen. Hierfür werden die theoretische Berechnung von Rauschen, Dynamikbereich, Bestimmung der Skalierungsfaktoren und die Abschätzung des maximalen Pegels des Eingangssignals mit Hilfe der Zustandsdarstellung vorgestellt. Unter Berücksichtigung der Aussteuerbarkeit wird gezeigt, daß die Struktur von PWDF nur geringe Abweichungen gegenüber der Struktur ohne Übersteuerung aufweist, weil die Struktur von PWDF in digitaler Ausführung numerisch stabil ist. Hierbei werden die bei der Rechnersimulation gewonnenen Ergebnisse beschrieben. Die PWDF lassen sich dabei mit endlichen Signalwortlängen frei von Grenzzyklusschwingungen realisieren. Das Ausgangssignal konvergiert nach dem Abschalten des Eingangssignals wie erwünscht gegen Null. Die Ergebnisse einiger Simulationsbeispiele werden mit den theoretisch berechneten Eigenschaften verglichen, und dies für WDF mit Spannungswellen bzw. Leistungswellen. Insbesondere behandelt die Untersuchung Rauschen, Dynamik und (einschließlich des Eingangssignalpegels, der einen überlaufstabilen Betrieb des Filters garantiert) Grenzzyklusschwingungen.



2. SPANNUNGSWELLEN UND LEISTUNGSWELLEN

Die Untersuchungen von Wellendigitalfiltern haben bisher zumeist auf der Verwendung von Spannungswellen basiert. Die Verwendung von Leistungswellen bei der Untersuchung von Wellendigitalfiltern wurde zwar in [1] bereits erwähnt, aber dieser Ansatz wurde dann nicht verfolgt, weil die Realisierung von PWDF mehr Multiplizierer als die von VWDF benötigt [8]. Heutzutage spielen aus Gründen der Wirtschaftlichkeit bei der Herstellung integrierter Schaltungen Fragen der Zusammenschaltbarkeit eine größere Rolle. Wenn großer Bedarf nach Wellendigitalfiltern für Nachrichtenübertragung und Signalverarbeitung entsteht, wird der Aufwand bei der Herstellung in erster Linie durch die Technologie bestimmt. Das führte deshalb zu einer vergleichenden Untersuchung von Wellendigitalfiltern, die unter Verwendung von Spannungswellen bzw. Leistungswellen hergeleitet werden [6]. Hierbei entdeckte man eine Menge interessanter Eigenschaften von PWDF sowohl bei der theoretischen Analyse, als auch bei der Realisierung. Im vorliegenden Kapitel 2 werden die Definitionen für einige Elemente, die Quelle und die Definitionen von Adaptoren bzw. Eintoren, Zweitoren und Mehrtoren unter Verwendung von Leistungswellen eingeführt. Da diese Definitionen unter Verwendung von Spannungswellen schon in anderen Veröffentlichungen von A. Fettweis und anderen publiziert wurden, werden diese Definitionen in dieser Arbeit nicht für jeden Fall wiederholt. Diese Definitionen helfen uns aber dabei, die Bauelemente der Analogfilter in Bestandteile im Wellenflußdiagramm zu überführen. Außerdem müssen die Wellendigitalfilter, die aus Bestandteilen im Wellenflußdiagramm bestehen, analysiert, berechnet und simuliert werden. Damit entsteht eine Beschreibung für die Zusammenschaltung im Wellenflußdiagramm (oder allgemein im Signalfußdiagramm), die durch eine Struktur-Matrix darstellbar ist. Aus der Untersuchung der Struktur-Matrix läßt sich eine Methode ableiten, die für die Analyse, Berechnung und Simulation der Zusammenschaltung von Wellendigitalfiltern anwendbar ist. Diese Methode kann dann auch bei anderen Digitalfiltern angewendet werden.

2.1. Bestandteile in Leistungswellen-Darstellung

Die einfallende Welle und die reflektierte Welle in Spannungswellen-Darstellung werden in Bild 2.1 definiert [1] durch

$$a = u + R \cdot i \quad (1a)$$

$$b = u - R \cdot i \quad (1b),$$

wobei u der Momentanwert der Spannung, i der Momentanwert des Stroms und R der Torwiderstand ist.

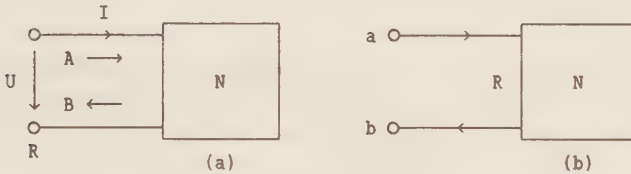


Bild 2.1 Eintor

(a) Eintor im klassischen Netzwerk

(b) Eintor in WDF

Nun werden Leistungswellen für die Herleitung der Wellendigitalfilter verwendet, die durch

$$a = (u + R \cdot i) / 2 \sqrt{R} \quad (2a)$$

$$b = (u - R \cdot i) / 2 \sqrt{R} \quad (2b)$$

definiert sind, wobei u , i , R die oben angegebene Bedeutung haben.

Der Unterschied zwischen beiden besteht nur in einer Konstante (der Quadratwurzel des Torwiderstands R).

Ausgehend von der Definition der einfallenden und reflektierten Wellen werden einige Tabellen für Eintore, Zweitore und Mehrfore, die die wichtigsten Bestandteile für WDF sind, in Wellendarstellung zur Verfügung gestellt. In jede der Tabellen gibt es noch einige Subtabellen, die sich in Anzahl der Verzögerer voneinander unterscheiden. In diesen Tabellen werden die Wellenbeziehungen bzw. Wellenreflexionsfaktoren für Eintore und die Streumatrizen $H(z)$, die kanonischen Polynome f , g , h für Zweitore eingetragen. Da die meisten Dreitore mit Verzögerern im Wellenflußdiagramm als Zweitore betrachtet werden können, treten sie in der Tabelle für Zweitore auf. Die Tabelle für Mehrfore zeigt die Mehrfore ohne Verzögerer im Wellen-

flußdiagramm. Über die Mehrstore mit Verzögerern im Wellenflußdiagramm, die nicht als Zweistore betrachtet werden können (z.B. Kreuzschaltung, Brücken-T-Filter), wird im folgenden ein Abschnitt über die Zusammenschaltung von WDF diskutiert. Da Mehrstore ohne Verzögerer im Wellenflußdiagramm häufig als Mehrstor-Adaptoren erscheinen, und zwar als Einstore mit Verzögerern, Zweistore mit Verzögerern im allgemeinen durch Adaptoren zu realisieren sind, werden von vornherein die Wellenbeziehungen für den Mehrstor-Adaptor mit aufgenommen.

Zur Berechnung der Adaptoren in Leistungswellen-Darstellung wurde auf der Arbeit [11] von A. Fettweis und K. Meerkötter aufgebaut. Man findet dort die Adaptor-Gleichungen für Spannungswellen.

So gilt die Gleichung für Paralleladaptoren

$$b'_V = (\alpha_1 \cdot a'_1 + \alpha_2 \cdot a'_2 + \dots + \alpha_n \cdot a'_n) - a'_V \quad (3)$$

$$\alpha_V = 2 \cdot G_V / (G_1 + G_2 + \dots + G_n) \quad (4)$$

mit $G_V = 1 / R_V$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2 \quad (5)$$

$$\alpha_V / \alpha_\mu = R_\mu / R_V \quad (6)$$

Dagegen ist die Gleichung für Serienadaptoren mit

$$b'_V = a'_V - \alpha_V \cdot (a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n) \quad (7)$$

$$\alpha_V = 2 \cdot R_V / (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (8)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2$$

$$\alpha_V / \alpha_\mu = R_V / R_\mu \quad (9)$$

gegeben.

Zwischen Spannungswellen und Leistungswellen besteht der Faktor $2\sqrt{R}$, d.h.

$$a'_V = 2 \cdot \sqrt{R} \cdot a_V \quad (10)$$

$$b'_V = 2 \cdot \sqrt{R} \cdot b_V \quad (11)$$

wobei a_V , b_V die Leistungswellen, a'_V , b'_V die Spannungswellen sind.

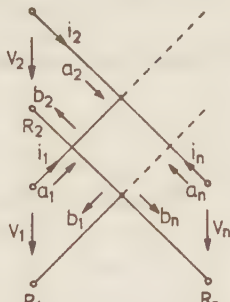
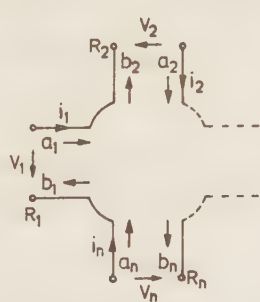
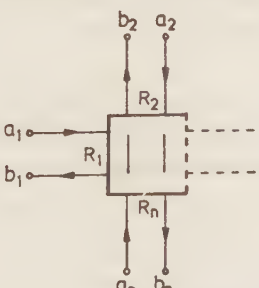
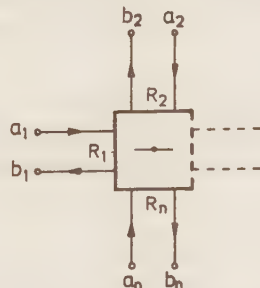
	
$V_1 = V_2 = \dots = V_n$ $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$	$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0$ $i_1 = i_2 = \dots = i_n$
	
$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n$ $b_\nu = \gamma_\nu \cdot a_0 - a_\nu$ $\nu = 1, 2, \dots, n, G_\nu = 1/R_\nu$ $\gamma_\nu = \sqrt{\frac{2G_\nu}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}}$ $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 = 2$	$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n$ $b_\nu = a_\nu - \gamma_\nu \cdot a_0$ $\nu = 1, 2, \dots, n$ $\gamma_\nu = \sqrt{\frac{2R_\nu}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}}$ $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 = 2$
$S = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 - 1 & \gamma_1 \gamma_2 & \dots & \gamma_1 \gamma_n \\ \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 - 1 & \dots & \gamma_2 \gamma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n \gamma_1 & \gamma_n \gamma_2 & \dots & \gamma_n^2 - 1 \end{bmatrix}$	$S = - \begin{bmatrix} \gamma_1^2 - 1 & \gamma_1 \gamma_2 & \dots & \gamma_1 \gamma_n \\ \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 - 1 & \dots & \gamma_2 \gamma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n \gamma_1 & \gamma_n \gamma_2 & \dots & \gamma_n^2 - 1 \end{bmatrix}$

Tabelle 2.2 Parallel- und Serien-Mehrtor-Adaptor

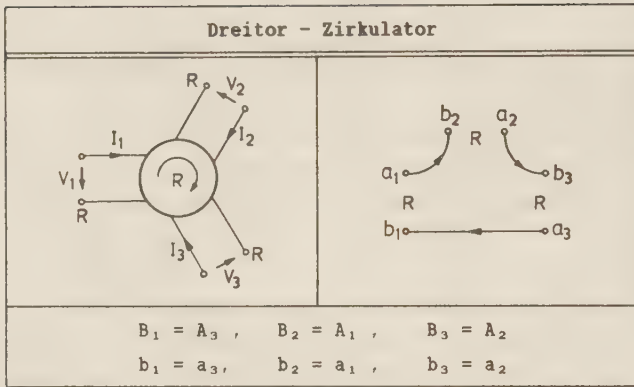


Tabelle 2.2.1 Dreitor ohne Verzögerer

In (3) werden die Wellen a'_ν , b'_ν durch a_ν , b_ν nach (10), (11) ersetzt. Nach geeigneten Umformungen findet man den gesuchten Zusammenhang zwischen a_ν und b_ν , indem die Beziehung (6) benutzt wird.

$$\begin{aligned}
 b_\nu &= \sqrt{\alpha_\nu} \cdot (\sqrt{\alpha_1} \cdot a_1 + \sqrt{\alpha_2} \cdot a_2 + \dots + \sqrt{\alpha_n} \cdot a_n) - a_\nu \\
 &= \gamma_\nu \cdot (\gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n) - a_\nu \\
 &= \gamma_\nu \cdot a_0 - a_\nu
 \end{aligned} \tag{12}$$

wobei $\gamma_i = \sqrt{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n \tag{13}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 = 2 \tag{14}$$

Ähnliche Umrechnungsbeziehungen lassen sich zwischen a_ν und b_ν bei Serienadaptoern ableiten, wenn in (7) die Wellen a'_ν , b'_ν nach (10), (11) ersetzt werden und die Beziehung (9) benutzt wird. So ergibt sich

$$b_\nu = - (\gamma_\nu \cdot a_0 - a_\nu) \tag{15}$$

wobei γ_ν , a_0 wie oben angegeben definiert sind.

Die zwei Adaptor-Gleichungen können zusammengefaßt werden. So ist der Ausdruck für den Adaptor

$$b_V = \pm (\gamma_V \cdot a_0 - a_V) \quad (16)$$

Die Streumatrix des Adaptors lässt sich wie in [2] schreiben

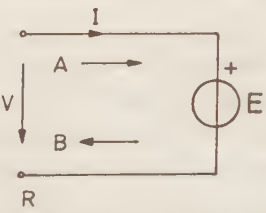
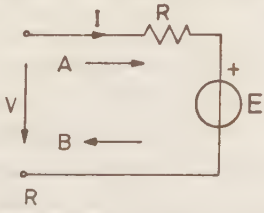
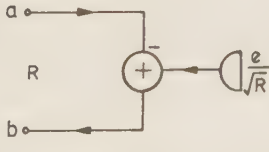
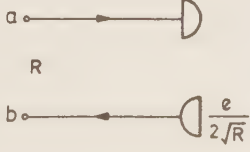
$$S = \pm (\gamma \cdot \gamma^T - I) \quad (17)$$

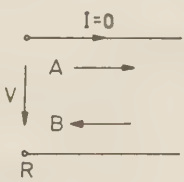
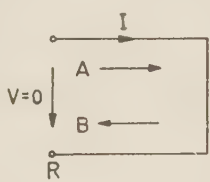
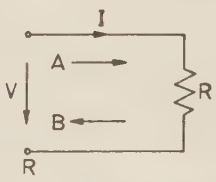
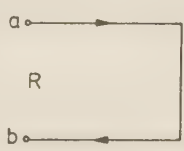
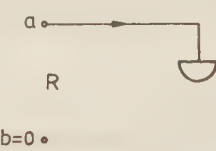
mit $\gamma^T = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ und I als Einheitsmatrix.

Hierbei gilt das Pluszeichen für den Paralleladaptor, das Minuszeichen für den Serienadaptor.

Durch die Leistungswellen-Darstellung wird die Streumatrix ganz wie gewünscht symmetrisch.

Da physikalische Eigenschaften unabhängig von der Art der Beschreibung sind, erscheinen viele Wellenbeziehungen aus der Spannungswellen-Darstellung in gleicher Form auch in der Leistungswellen-Darstellung, besonders für Eintore (vid. [2]).

Ideale Spannungsquelle	Spannungsquelle mit Widerstand
$V = E$	$V = E + RI$
	
$B = E/\sqrt{R} - A$ $b = e/\sqrt{R} - a$	$B = E/2\sqrt{R}$ $b = e/2\sqrt{R}$
	

Leerlauf	Kurzschluß	Widerstand
$I = 0$	$V = 0$	$V = RI$
		
$B = A$ $b = a$	$B = -A$ $b = -a$	$B = 0$ $b = 0$
		

(b)

Tabelle 2.3.1 Eintore ohne Verzögerer

Kapazität und Induktivität, die in Analogfiltern oft benutzt sind, können durch digitale Nachbildung als eine Verzögerung abgebildet werden, indem man die folgenden Zusammenhänge verwendet [1].

$$\psi = \frac{z - 1}{z + 1} = \tanh (PT/2) ,$$

$$z = e^{PT},$$

wobei ψ die Frequenzvariable, P die complexe Frequenz und T die Abtastperiode ist.

$$\phi = \tan (\omega T/2) ,$$

$$P = j\omega , \quad \psi = j\phi$$

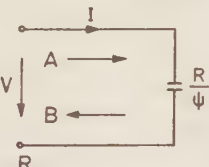
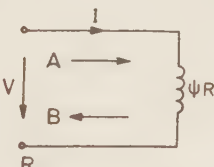
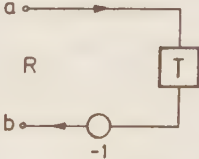
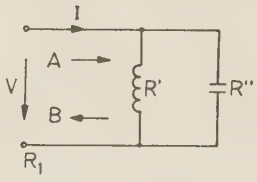
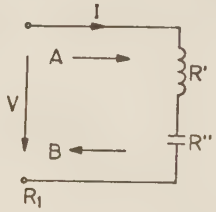
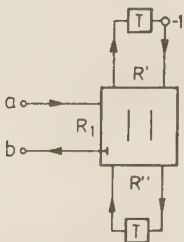
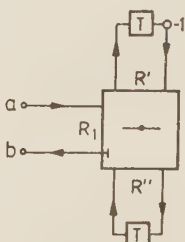
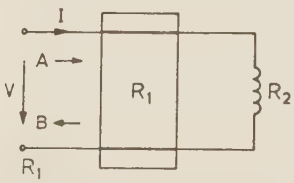
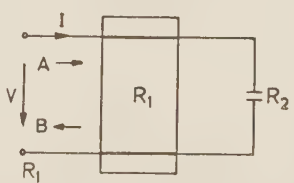
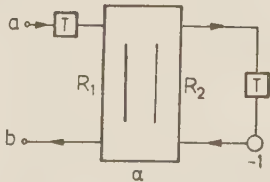
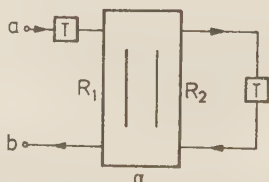
Kapazität	Induktivität
$V = RI/\psi$	$V = RI\psi$
	
$B = z^{-1}A$ $b(t_n) = a(t_{n-1})$	$B = -z^{-1}A$ $b(t_n) = -a(t_{n-1})$
	

Tabelle 2.3.2 Eintore mit einem Verzögerer

Außer der Spannungsquelle stimmen alle Wellenbeziehungen oder Wellenreflexionsfaktoren bei Einführung von Leistungswellen mit denen bei Einführung von Spannungswellen überein (vid. [2]), da die Reflexionsfaktoren unabhängig davon sind, ob zur Definition Leistungswellen oder Spannungswellen verwendet werden. Hierbei wird als Reflexionsfaktor das komplexe Verhältnis von einer rücklaufenden zu einer einfallenden Welle definiert. Im komplexer Schreibweise folgt mit (1a, 1b, 2a, 2b) :

$$\rho = \frac{B}{A} = \frac{V - R \cdot I}{V + R \cdot I} = \rho(z) \quad (18),$$

$$\rho = \frac{B}{A} = \frac{(V - R \cdot I) / 2\sqrt{R}}{(V + R \cdot I) / 2\sqrt{R}} = \frac{V - R \cdot I}{V + R \cdot I} = \rho(z) \quad (19).$$

A	B
	
	
	
$R_1 = \frac{R' R''}{R' + R''} , \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{R'}{R''} ,$ $R' = R_1 + R_2$	$R_1 = R' + R'' ,$ $R'' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} , \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{R''}{R'}$
	

A	B
$\Gamma_L(\psi) = \frac{z - R_1}{z + R_1}$ $= \frac{-R' \psi^2 + (R' + R'') \psi - R''}{R' \psi^2 + (R' + R'') \psi + R''} ,$ $\rho(z) = \frac{-\alpha z - 1}{z^2 + \alpha z}$	$\Gamma_L(\psi) = \frac{z - R_1}{z + R_1}$ $= \frac{R' \psi^2 - (R' + R'') \psi + R''}{R' \psi^2 + (R' + R'') \psi + R''} ,$ $\rho(z) = \frac{-\alpha z + 1}{z^2 - \alpha z}$

Tabelle 2.3.3 Eintore mit zwei Verzögerern

Das Einheitselement (*Unit Element*) spielt eine große Rolle bei der Nachbildung von SC-Netzwerken und des Resonanztransfers [2], [12], [13] und kann zur Synthese von Mikrowellenfiltern benutzt werden. Mit Hilfe eines Einheitselements können Resonanzschaltungen durch reihengeschaltete Verzögerer und Zweitor-Adaptoren realisiert werden. So ist es möglich, einen Dreitor-Adaptoren in einen Zweitor-Adaptor umzuwandeln (s. **Tabelle 2.3.3**).

Den Reflexionsfaktor im Wellenflußdiagramm kann man mit Hilfe der Betriebskettenparameter berechnen.

$$\rho(z) = z^{-1} \cdot \frac{B_1}{A_1} = z^{-1} \cdot \frac{T_{11} \cdot A_2 + T_{12} \cdot B_2}{T_{21} \cdot A_2 + T_{22} \cdot B_2} ,$$

wobei die T_{ij} Betriebskettenparameter darstellen, mit $i = 1, 2, j = 1, 2$.

Die Betriebskettenmatrix für Zweitore ist gegeben durch

$$T = \begin{bmatrix} \frac{S_{21} \cdot S_{12} - S_{11} \cdot S_{22}}{S_{21}} & \frac{S_{11}}{S_{21}} \\ \frac{-S_{22}}{S_{21}} & \frac{1}{S_{21}} \end{bmatrix} .$$

Die Matrix T eines Zweitor-Adaptors kann man wie folgt schreiben

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \alpha} & \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \\ \frac{-\alpha}{1 - \alpha} & \frac{1}{1 - \alpha} \end{bmatrix} \quad (20) ,$$

weil $S = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 + \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{bmatrix}$, α den Multiplizierer eines Zweitorts darstellen

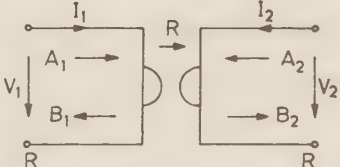
[11] (s. Tabelle 2.3.3). Der Reflexionsfaktor im Wellenflußdiagramm in Tabelle 2.3.3 ist

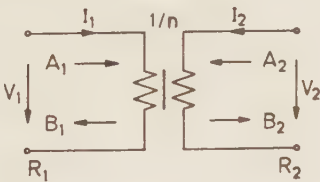
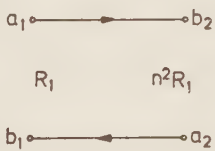
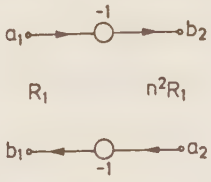
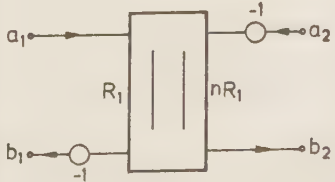
$$\rho(z) = \begin{cases} z^{-1} \cdot \frac{z^{-1} - \alpha}{-\alpha \cdot z^{-1} + 1} = \frac{1 - \alpha \cdot z}{z \cdot (z - \alpha)} & (\text{für } A_2 = z^{-1} \cdot B_2) \end{cases} \quad (21a)$$

$$\begin{cases} z^{-1} \cdot \frac{-z^{-1} - \alpha}{\alpha \cdot z^{-1} + 1} = \frac{-1 - \alpha \cdot z}{z \cdot (z + \alpha)} & (\text{für } A_2 = -z^{-1} \cdot B_2) \end{cases} \quad (21b).$$

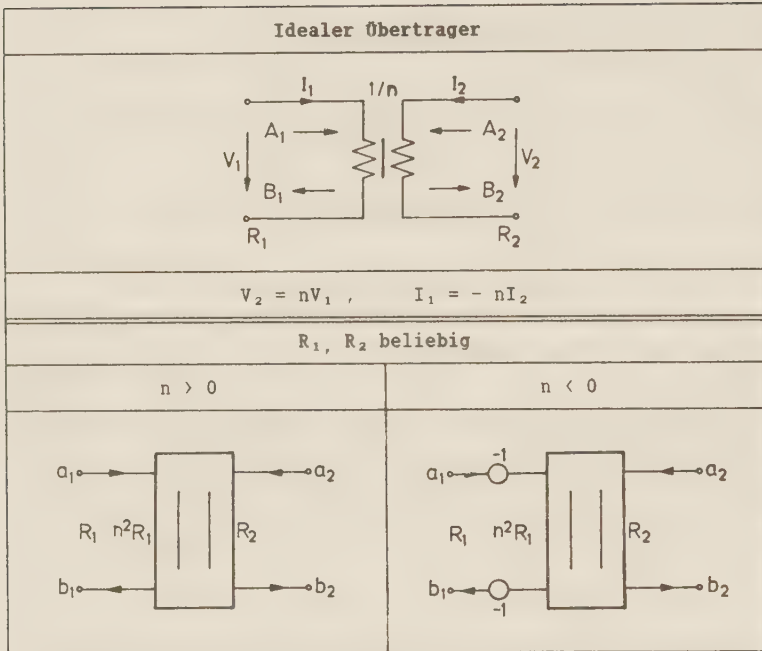
Die Berechnung mit Hilfe der Struktur-Matrix wird im folgenden vorgestellt.

Zweitore ohne Verzögerer oder mit Verzögerern können als Ordnungsglieder nullter, erster oder zweiter Ordnung aufgefaßt werden. Die folgenden Tabellen sind entsprechend dieser Ordnung eingeteilt. Für Ordnungsglieder erster und zweiter Ordnung werden die kanonischen Polynome f , g , h eingetragen.

Gyrator	
	$K = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix}$
	$B_1 = -A_2, \quad B_2 = A_1$ $b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1$

Idealer Übertrager	
	
$V_2 = nV_1, \quad I_1 = -nI_2$	
$R_2 = n^2R_1$	
$n > 0$	$n < 0$
$B_1 = A_2, \quad B_2 = A_1$ $b_1 = a_2, \quad b_2 = a_1$	$B_1 = -A_2, \quad B_2 = -A_1$ $b_1 = -a_2, \quad b_2 = -a_1$
	
$R_2 = nR_1$	
$n > 0$	
$S = \begin{bmatrix} \frac{1-n}{1+n} & \frac{2\sqrt{n}}{1+n} \\ \frac{2\sqrt{n}}{1+n} & \frac{n-1}{1+n} \end{bmatrix}$	
	

(a)



(b)

Tabelle 2.4.1 Zweitore ohne Verzögerer

Der ideale Übertrager in Leistungswellen-Darstellung unterscheidet sich bei den Wellenbeziehungen vom idealen Übertrager in Spannungswellen-Darstellung. Die Multiplizierer mit den Koeffizienten n und $1/n$ sind im Wellenflußdiagramm verschwunden. Wenn das Übertragungsvorzeichen des idealen Übertragers negativ ist, treten im Wellenfluß-diagramm zwei Inverter auf.

Ein Dreitor-Adaptor im Fall der Resonanzschaltung kann durch Verwendung eines Leitungselements in einen Zweitor-Adaptor umgewandelt werden. Das hat aber zur Folge, daß in anderen Schaltungen auch Leitungselemente eingesetzt werden, ohne daß die Filterwirkung berücksichtigt wird. Für Wellendigitalfilter in Abzweigstruktur mit Leitungselementen ist die Filterwirkung von in Kette geschalteten Einzelelementen geringer als die von Kapazitäten und Induktivitäten.

Deshalb sollte die Zahl der verwendeten Einheits-elemente so niedrig wie möglich gehalten werden [15]. Die Einheits-elemente haben aber dazu beigetragen, daß nicht realisierbare Wellendigitalfilter (z.B. Kreuzschaltung und Brücken-T-Filter) in realisierbare Wellendigitalfilter übergehen, ohne die Übertragungsfunktion zu ändern. Darüber wird im folgenden ausführlich diskutiert.

Unit Element	Quarl
$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2}} \begin{bmatrix} 1 & \psi R \\ \psi/R & 1 \end{bmatrix}$	$K = \frac{e^{p\Delta}}{\sqrt{1 - \psi^2}} \begin{bmatrix} 1 & \psi R \\ \psi/R & 1 \end{bmatrix}$
$B_1 = e^{-pT/2} A_2, B_2 = e^{-pT/2} A_1$ $b_1(t_{1m}) = a_2(t_{1m} - \frac{T}{2})$ $b_2(t_{2m}) = a_1(t_{2m} - \frac{T}{2})$	$B_1 = e^{-pT_{12}} A_2, B_2 = e^{-pT_{21}} A_1$ $b_1(t_{1m}) = a_2(t_{1m} - T_{12})$ $b_2(t_{2m}) = a_1(t_{2m} - T_{21})$
	$T_{21} = T/2 + \Delta$ $T_{12} = T/2 - \Delta$

Tabelle 2.4.2 Zweitore mit Einheits-element (Unit Element)

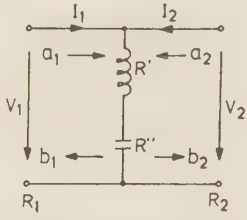
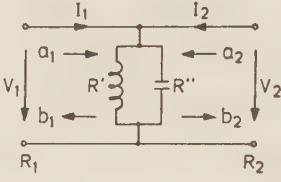
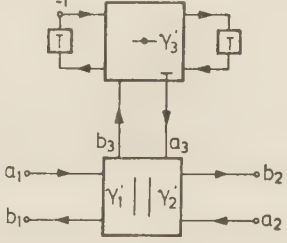
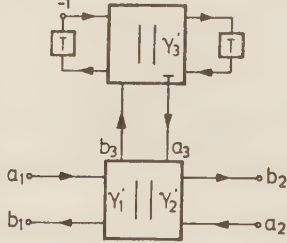
$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}z - s_{22}}{z - s_{33}} & \frac{s_{12}(z + 1)}{z - s_{33}} \\ \frac{s_{21}(z + 1)}{z - s_{33}} & \frac{s_{22}z - s_{11}}{z - s_{33}} \end{bmatrix}$	$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}z + s_{22}}{z + s_{33}} & \frac{s_{12}(z - 1)}{z + s_{33}} \\ \frac{s_{21}(z - 1)}{z + s_{33}} & \frac{s_{22}z + s_{11}}{z + s_{33}} \end{bmatrix}$
$\begin{aligned} f &= \gamma_1 \gamma_2 (z + 1) \\ g &= z - (1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2) \\ h &= (\gamma_1^2 - 1)z - (\gamma_2^2 - 1) \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} f &= \gamma_1 \gamma_2 (z - 1) \\ g &= z + (1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2) \\ h &= (\gamma_1^2 - 1)z + (\gamma_2^2 - 1) \\ \sigma &= -1 \end{aligned}$
$\gamma_i^2 = \gamma_i'^2, \quad i = 1, 2$	

(a)

$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}z + s_{22}}{z - s_{33}} & \frac{s_{12}(z - 1)}{z - s_{33}} \\ \frac{s_{21}(z - 1)}{z - s_{33}} & \frac{s_{22}z + s_{11}}{z - s_{33}} \end{bmatrix}$	$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}z - s_{22}}{z + s_{33}} & \frac{s_{12}(z + 1)}{z + s_{33}} \\ \frac{s_{21}(z + 1)}{z + s_{33}} & \frac{s_{22}z - s_{11}}{z + s_{33}} \end{bmatrix}$
$\begin{aligned} f &= -\gamma_1\gamma_2(z - 1) \\ g &= z - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1) \\ h &= (1 - \gamma_1^2)z + (1 - \gamma_2^2) \\ \sigma &= -1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} f &= -\gamma_1\gamma_2(z + 1) \\ g &= z + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1) \\ h &= (1 - \gamma_1^2)z - (1 - \gamma_2^2) \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$
$\gamma_i'^2 = \gamma_i', \quad i = 1, 2$	

(b)

Tabelle 2.4.3 Zweitore mit einem Verzögerer

	
	
$f = \gamma_1 \gamma_2 [z^2 + 2(2\gamma_3^2 - 1)z + 1]$ $g = z^2 + (2\gamma_3^2 - 1)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)z + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1$ $h = (\gamma_1^2 - 1)z^2 + (2\gamma_3^2 - 1) \cdot (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)z - \gamma_2^2 + 1$ $\sigma = 1$	$f = \gamma_1 \gamma_2 (z^2 - 1)$ $g = z^2 + (1 - 2\gamma_3^2)(2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)z + 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2$ $h = (\gamma_1^2 - 1)z^2 + (1 - 2\gamma_3^2) \cdot (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2)z + \gamma_2^2 - 1$ $\sigma = -1$
$\gamma_i^2 = \gamma_i', \quad i = 1, 2, 3$	

(a)

$f = -\gamma_1 \gamma_2 [z^2 + 2(1 - 2\gamma_3^2)z + 1]$ $g = z^2 + (1 - 2\gamma_3^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)z + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1$ $h = (1 - \gamma_1^2)z^2 + (1 - 2\gamma_3^2) \cdot (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)z + \gamma_2^2 - 1$ $\sigma = 1$	$\bar{f} = -\gamma_1 \gamma_2 (z^2 - 1)$ $g = z^2 + (2\gamma_3^2 - 1)(2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)z + 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2$ $h = (1 - \gamma_1^2)z^2 + (2\gamma_3^2 - 1) \cdot (2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)z - \gamma_2^2 + 1$ $\sigma = -1$
$\gamma_i'^2 = \gamma_i'^{-1}, \quad i = 1, 2, 3$	

(b)

Tabelle 2.4.4 Zweitore mit zwei Verzögerern

Zweitore mit Verzögerern hält man unter Verwendung von Leistungs-
wellen übertragungssymmetrisch, nicht nur global für das ganze System,
sondern auch bei den Teilschaltungen, indem man die Umformulierung von den
Gleichungen der Adaptoren aufbaut.

2.2 Strukturorientierte Matrix (Struktur - Matrix) für das Digitalfilter-Netzwerk

Bei der Untersuchung zeitdiskreter Systeme befaßt man sich mit Differenzgleichungen bzw. Zustandsgleichungen. Dazu werden Strukturorientierte Matrizen aufgestellt, die bis jetzt im Signalflußdiagramm nur im Z-Bereich dargestellt wurden. Die Gleichungen im Zeitbereich leiten sich dann von denen im Z-Bereich her [30]-[32]. Für komplizierte Strukturen und auch die digital nachgebildeten Strukturen braucht man jedoch eine im Zeitbereich dargestellte "Strukturorientierte Matrix" des Signalflußnetzwerks, um die Simulation so genau wie möglich durchführen zu können. Zu diesem Zweck ist die Strukturorientierte Matrizendarstellung zunächst für Wellendigitalfilter, später auch für andere Digitalfilter entwickelt worden. Selbstverständlich ist die Struktur-Matrix (*strukturorientierte Matrizendarstellung*) dann auch von großer Bedeutung für die theoretische Analyse und Realisierung von Digitalfiltern.

2.2.1 Definitionen einiger Vektoren

Es seien lineare, zeitinvariante, kausale Systeme mit mehreren Eingängen und Ausgängen zur Verarbeitung zeitdiskreter Signale betrachtet. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich die Systeme ausschließlich aus den konzentrierten Bauelementen "Zustandsspeicher (*Verzögerer*)" und "Nicht-Zustandsspeicher (*Addierer, Multiplizierer, Adaptor und Bausteine, die aus Addierern und Multiplizierern bestehen*)" gemäß Bild 2.5 zusammensetzen.

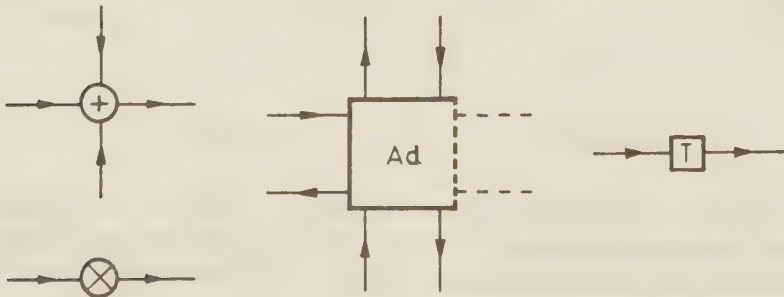


Bild 2.5 Symbolische Darstellung der Bauelemente linearer zeitdiskreter Systeme

Hierbei wird ein Adaptor als Baustein betrachtet, dessen zugängliche Knoten als Eingangsknoten und Ausgangsknoten des Adaptors bezeichnet werden und dessen unzugängliche Knoten nicht in die im folgenden definierten Vektoren eintreten können (*Konzeption des "schwarzen Kastens"*), um die Dimension der Struktur-Matrix nicht zu groß werden zu lassen. Dagegen müssen die unzugänglichen Knoten der Adaptoren bei der Realisierung von WDF bzw. beim Aufbau der Adaptoren unbedingt berücksichtigt werden. Die Aufstellung der Struktur-Matrix beruht auf der Theorie der Signalflußgraphen [14], [30]-[34] einerseits und auf den aus der Regelungstechnik bekannten Zustandsgleichungen andererseits. Um die Matrixgleichungen aufzustellen, aus denen eine Struktur-Matrix abgeleitet werden kann, sollen zunächst einige Vektoren definiert werden.

Die Vektoren sind die Zustandsvektoren $X_{(k)}$, $X_{(k-1)}$, die Verbindungsvektoren $V_{(k)}$, $N_{(k)}$, der Eingangsvektor $R_{(k)}$ und der Ausgangsvektor $Y_{(k)}$ [6], [35]. Die Vektoren $X_{(k)}$ und $X_{(k-1)}$ enthalten die Knotensignale, bei denen die entsprechenden Knoten mit zumindest einem ankommenden oder abgehenden Signal aus dem Zustandsspeicher verbunden sind. Die Vektoren $V_{(k)}$ und $N_{(k)}$ enthalten die Knotensignale, bei denen die entsprechenden Knoten mit zumindest dem ankommenden und einem abgehenden Signale aus dem Nicht-Zustandsspeicher (Addierer, Multiplizierer, Adaptor und Baustein, der aus Addierern und Multiplizierern besteht) verbunden sind. Diese Knotensignale sind die übertragenen Signale im Moment k des inneren Digitalfilter-Netzwerks. Die Vektoren $Y_{(k)}$ und $R_{(k)}$ enthalten die Eingangssignale und die Ausgangssignale des Digitalfilter-Netzwerks.

Der Zusammenhang zwischen den Vektoren wird wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} X_{(k)} \\ \hline V_{(k)} \\ \hline Y_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & F & \vdots & B \\ \hline G & \vdots & E & \vdots & P \\ \hline C & \vdots & L & \vdots & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{(k-1)} \\ \hline N_{(k)} \\ \hline R_{(k)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{X}_{(k)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_{(k)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (23)$$

$$\mathbf{V}_{(k)} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_{(k)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (24)$$

$$\mathbf{Y}_{(k)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_{(k)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (25)$$

Daher besteht die Struktur-Matrix im allgemeinen aus neun Teilmatrizen: A, B, C, D, E, F, G, L, P.

Nachdem nun einige Vektoren bereits definiert sind, soll der Deutlichkeit wegen der Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathbf{V}_{(k)}$ und $\mathbf{N}_{(k)}$ erläutert werden. Der Vektor $\mathbf{V}_{(k)}$ enthält die ankommenden Knotensignale bzw. Ausgangssignale der Nicht-Zustandsspeicher. Dagegen enthält der Vektor $\mathbf{N}_{(k)}$ die abgehenden Knotensignale bzw. Eingangssignale der Nicht-Zustandsspeicher. Sie sind aber numerisch gleich. Die numerischen Ausdrücke kann man durch Auflösung der Matrizengleichungen erhalten, wogegen die physikalische Bedeutung erst bei der Simulation oder bei der Realisierung deutlich wird. $\mathbf{V}_{(k)}$ und $\mathbf{N}_{(k)}$ beziehen sich im Moment k auf die gleichen Knoten, die eine Untermenge der Menge aller Verzweigungspunkte bilden. Dagegen sind $\mathbf{X}_{(k)}$ und $\mathbf{X}_{(k-1)}$ nicht als Vektor-Paar im Moment k aufzufassen. Normalerweise treten ihre entsprechenden Knotensignale nicht an den gleichen Knoten auf. $\mathbf{R}_{(k)}$ und $\mathbf{Y}_{(k)}$ geben die Beziehung von Eingangs- und Ausgangssignalen des Digitalfilters im Moment k wieder. Normalerweise beziehen auch sie sich nicht auf den gleichen Knoten.

Im Gegensatz zu anderen strukturorientierten Matrizendarstellungen [30]-[32] ist hier eine Klassifizierung der Vektoren in Zustandsvektoren und Nicht-Zustandsvektoren vorteilhaft, denn z^{-1} als Bezeichnung für einen Zustandsspeicher im z -Bereich tritt nicht in der Struktur-Matrix auf. Das bedeutet, daß die Aufstellung der Struktur-Matrix erst im Zeitbereich bedeutsam wird. Die Übertragungsfunktion $H(z)$ leitet sich dann von den Matrizengleichungen im Zeitbereich mit Hilfe der z -Transformation her. Die daraus ableitbare Vorgehensweise für die Simulation entspricht ganz der physikalischen Interpretation. Das gilt besonders bei der Simulation von Wellendigitalfiltern, die eine digitale Nachbildung von Analogfiltern sind. So erreicht man bei der Simulation eine höhere Genauigkeit.

Es sei angenommen, daß die Vektoren jeweils Spaltenvektoren sind:

$$\mathbf{X}_{(k)} = [X_1(k), X_2(k), \dots, X_N(k)]^T,$$

$$\mathbf{X}(k-1) = [X_1(k-1), X_2(k-1), \dots, X_\nu(k-1)]^T,$$

$$\mathbf{V}(k) = [V_1(k), V_2(k), \dots, V_\mu(k)]^T,$$

$$\mathbf{N}(k) = [N_1(k), N_2(k), \dots, N_\mu(k)]^T,$$

$$\mathbf{Y}(k) = [Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_m(k)]^T,$$

$$\mathbf{R}(k) = [R_1(k), R_2(k), \dots, R_e(k)]^T.$$

Die zugehörigen Teilmatrizen haben dann folgende Form: A ist eine (ν, ν) Matrix, B ist eine (ν, e) Matrix, C ist eine (m, ν) Matrix, D ist eine (m, e) Matrix. E ist eine (μ, μ) Matrix, F ist eine (ν, μ) Matrix, G ist eine (μ, ν) Matrix, L ist (m, μ) Matrix, P ist eine (μ, e) Matrix. Entsprechend den oben angegebenen Definitionen entsteht eine Struktur-Matrix nicht nur aus den linearen, algebraischen Gleichungen, sondern auch aus physikalischen Überlegungen heraus. Wie oben erwähnt, steht $V_i(k)$ im engen Zusammenhang mit $N_i(k)$. Numerisch ist $V_i(k)$ gleich $N_i(k)$. Wegen ihrer physikalischen Bedeutung wird bei der Aufstellung der Struktur-Matrix statt $V_i(k) = N_i(k)$ eine lineare Kombination für $V_i(k)$ von den Knotensignalen außer $N_i(k)$, d.h. $V_i(k) = F(X(k-1), R(k), N_1(k), \dots, N_{i-1}(k), N_{i+1}(k), \dots, N_\mu(k))$ angesetzt. Bei der anschließenden Umformulierung wird dagegen $N_i(k) = V_i(k)$ benutzt. Zur Erläuterung sei folgendes Beispiel [36] (Bild 2.6) betrachtet: Gesucht sei dabei die Struktur-Matrix des Signalflußnetzwerks.

Beispiel 1

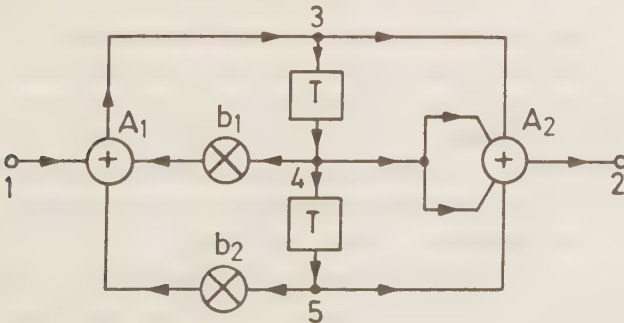


Bild 2.6 Ein Filter zweiter Ordnung

In Bild 2.6 haben wir

$$Ks_3 = Ks_1 + b_1 \cdot Ks_4 + b_2 \cdot Ks_5 ,$$

$$Ks_2 = Ks_3 + 2 \cdot Ks_4 + Ks_5 ,$$

$$Ks_3 = X_1(k) , \quad Ks_4 = X_1(k-1) ,$$

$$Ks_4 = X_2(k) , \quad Ks_5 = X_2(k-1) ,$$

wobei Ks_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) der Knotensignal ist.

Entsprechend den Definitionen der Vektoren sind

$$\mathbf{X}(k) = [Ks_3, Ks_4]^T , \quad \mathbf{X}(k-1) = [Ks_4, Ks_5]^T ,$$

$$\mathbf{V}(k) = [Ks_3] , \quad \mathbf{N}(k) = [Ks_3] ,$$

$$\mathbf{Y}(k) = [Ks_2] , \quad \mathbf{R}(k) = [Ks_1] .$$

Die Struktur-Matrix kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{V}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{N}(k) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Wir können sehen, daß das Knotensignal Ks_4 sowohl zu $\mathbf{X}(k)$, als auch zu $\mathbf{X}(k-1)$ gehört. Hierzu soll die Bedeutung dieser Größen erläutert werden. $X_1(k-1) = Ks_4$ bedeutet, daß die Zustandsvariable X_1 im Moment k gleich Ks_4 ist. $X_2(k) = Ks_4$ bedeutet, daß Ks_4 im Moment k im Zustandsspeicher für X_2 gespeichert wird. Außerdem können wir auch erkennen, daß das Knotensignal Ks_3 sowohl Zustandsvariable als auch Verbindungsvariable ist. Hierbei kann die Bedeutung des Knotensignals Ks_3 verdeutlicht werden. $X_1(k) = Ks_3$ bedeutet, daß Ks_3 im Moment k im Zustandsspeicher für X_1 gespeichert wird. $V(k) = Ks_3$ bedeutet, daß Ks_3 das Ausgangssignal des Nicht-Zustandsspeichers im Moment k oder der ankommende Signal von Knoten 3 ist. $N(k) = Ks_3$ bedeutet, daß Ks_3 das Eingangssignal des Nicht-Zustandsspeichers im Moment k oder das eingehende Signal des Knotens 3 ist. Man kann sagen, daß eigentlich erst $V(k)$ und dann $N(k)$ auftritt, weil der Knoten kein Zustands-

speicher ist.

Zur Vertiefung dieser Überlegung sei ein weiteres Beispiel [31] behandelt.

Beispiel 2

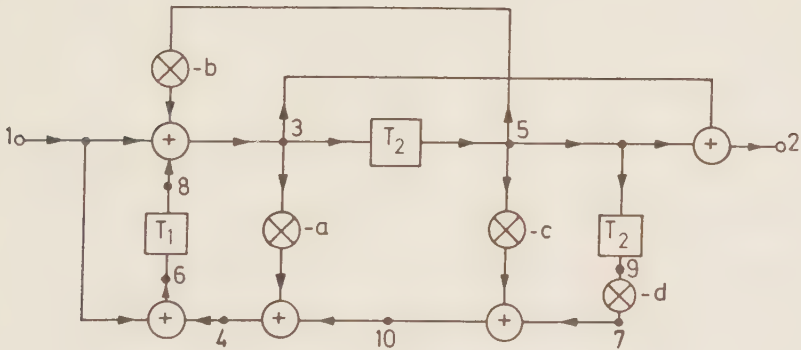


Bild 2.7 Ein zweidimensionales zeitdiskretes System

In Bild 2.7 bemerken wir

$$Ks_2 = Ks_3 + Ks_5 ,$$

$$Ks_3 = Ks_1 + (-b) \cdot Ks_5 + Ks_8 ,$$

$$Ks_6 = Ks_1 + Ks_4 ,$$

$$Ks_4 = (-a) \cdot Ks_3 + Ks_{10} ,$$

$$Ks_{10} = (-c) \cdot Ks_5 + Ks_7 ,$$

$$Ks_7 = (-d) \cdot Ks_9 .$$

In einem eindimensionalen zeitdiskreten System definieren wir die Zustandsvektoren durch $X_{(k)}$, $X_{(k-1)}$. Die Zustandsvektoren werden nun in einem zweidimensionalen zeitdiskreten System nach [37]–[39] folgendermassen definiert:

$$X_{(k_1, k_2)} , X_{(k_1 - \delta_1, k_2 - \delta_2)} , \delta_1 + \delta_2 = 1 ,$$

$$\Delta = \{ 0, 1 \} , \delta_1 \in \Delta , \delta_2 \in \Delta .$$

Um $Y(k_1, k_2)$, $X(k_1, k_2)$ zu berechnen, müssen die $X_i(k_1-1, k_2)$ und $X_j(k_1, k_2-1)$ mit $(i \neq j)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ im Zustandsspeicher vorher gespeichert werden.

Die Vektoren bestehen aus einigen Knotensignalen

$$X_1(k_1-1, k_2) = Ks_8, \quad X_1(k_1, k_2) = Ks_6,$$

$$X_2(k_1, k_2-1) = Ks_5, \quad X_2(k_1, k_2) = Ks_3,$$

$$X_3(k_1, k_2-1) = Ks_9, \quad X_3(k_1, k_2) = Ks_5,$$

$$X(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2) = [Ks_8, Ks_5, Ks_9]^T,$$

$$X(k_1, k_2) = [Ks_6, Ks_3, Ks_5]^T,$$

$$V(k_1, k_2) = [Ks_3, Ks_4, Ks_7, Ks_{10}]^T,$$

$$N(k_1, k_2) = [Ks_3, Ks_4, Ks_7, Ks_{10}]^T,$$

$$Y(k_1, k_2) = [Ks_2],$$

$$R(k_1, k_2) = [Ks_1].$$

Ein Knotensignal kann in verschiedenen Vektoren auftreten. Die unterschiedlichen Bedeutungen werden wie die im ersten Beispiel interpretiert. Die entsprechende Struktur-Matrix ist dann dargestellt durch

$$\begin{bmatrix} X(k_1, k_2) \\ \hline V(k_1, k_2) \\ \hline Y(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2) \\ \hline N(k_1, k_2) \\ \hline R(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

Obwohl die vorgelegte Arbeit schwerpunktmäßig eindimensionale zeitdiskrete Systeme behandelt, sollen demnach die Analyse- und Simulationsmöglichkeiten auch für multidimensionale zeitdiskrete Systeme anhand einiger Beispiele aufgezeigt werden. So sind die Vektoren für multidimensionale zeitdiskrete Systeme von der Form

$$\mathbf{X}(k_1, k_2, \dots, k_n), \mathbf{X}(k_1 - \delta_1, k_2 - \delta_2, \dots, k_n - \delta_n), \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 1,$$

$$\Delta = \{ 0, 1 \}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \Delta$$

$$\mathbf{V}(k_1, k_2, \dots, k_n), \mathbf{N}(k_1, k_2, \dots, k_n),$$

$$\mathbf{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n), \mathbf{R}(k_1, k_2, \dots, k_n).$$

D.h., die Zustandsvariablen

$$\mathbf{X}_{i_1}(k_1 - 1, k_2, \dots, k_n), \mathbf{X}_{i_2}(k_1, k_2 - 1, \dots, k_n), \dots,$$

$$\mathbf{X}_{i_n}(k_1, k_2, \dots, k_n - 1), i_1, i_2, \dots, i_n \in i, i = \{ 1, 2, \dots, n \},$$

sind für die Berechnung eines multidimensionalen zeitdiskreten Systems im Zeitbereich notwendig.

Die Struktur-Matrix eines multidimensionalen zeitdiskreten Systems ist somit dann ähnlich der eines eindimensionalen zeitdiskreten Systems:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k_1, k_2, \dots, k_n) \\ \mathbf{V}(k_1, k_2, \dots, k_n) \\ \mathbf{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{P} \\ \mathbf{C} & \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k_1 - \delta_1, k_2 - \delta_2, \dots, k_n - \delta_n) \\ \mathbf{N}(k_1, k_2, \dots, k_n) \\ \mathbf{R}(k_1, k_2, \dots, k_n) \end{bmatrix}$$

(28)

Hierbei sind A eine Matrix mit $\nu \times \nu$ Elementen, B eine Matrix mit $\nu \times e$ Elementen, C eine Matrix mit $m \times \nu$ Elementen, D eine Matrix mit $m \times e$ Elementen, E eine Matrix mit $\mu \times \mu$ Elementen, F eine Matrix mit $\nu \times \mu$ Elementen, G eine Matrix mit $\mu \times \nu$ Elementen, L eine Matrix mit $m \times \mu$ Elementen und P eine Matrix

mit $\mu \times e$ Elementen.

Gemäß den vorstehenden Definitionen einiger Vektoren läßt sich eine Struktur-Matrix entsprechend dem in Bild 2.8 dargestellten Wellenflußdiagramm aufstellen. Die Signale in Wellendigitalfiltern, deren Struktur auf der Streuparametertheorie basiert, sind Wellengrößen, nämlich die einfallenden- und rücklaufenden Wellen, welche zu jedem Adaptor gehören.

Beispiel 3

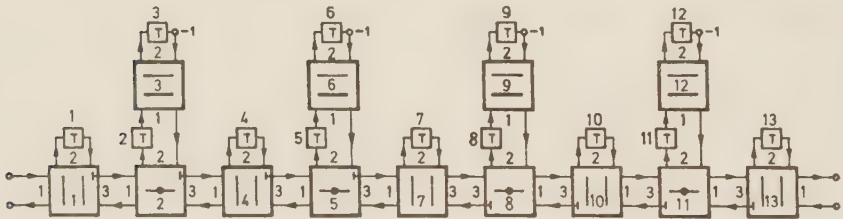


Bild 2.8 WDF (Tiefpass 9. Grades)

Im Bild 2.8 haben wir

$$\mathbf{X}_{(k)} = [b_2^{(1)}, b_2^{(2)}, b_2^{(3)}, b_2^{(4)}, b_2^{(5)}, b_2^{(6)}, b_2^{(7)}, b_2^{(8)}, \\ b_2^{(9)}, b_2^{(10)}, b_2^{(11)}, b_2^{(12)}, b_2^{(13)}]^T,$$

$$\mathbf{X}_{(k-1)} = [a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, -a_2^{(3)}, a_2^{(4)}, a_1^{(6)}, -a_2^{(6)}, a_2^{(7)}, a_1^{(9)}, \\ -a_2^{(9)}, a_2^{(10)}, a_1^{(12)}, -a_2^{(12)}, a_2^{(13)}]^T,$$

$$\mathbf{V}_{(k)} = [b_3^{(1)}, b_1^{(2)}, b_1^{(3)}, b_3^{(2)}, b_1^{(4)}, b_3^{(4)}, b_1^{(5)}, b_1^{(6)}, \\ b_3^{(5)}, b_1^{(7)}, b_3^{(7)}, b_3^{(8)}, b_1^{(9)}, b_1^{(8)}, b_3^{(10)}, b_1^{(10)}, \\ b_3^{(11)}, b_1^{(12)}, b_1^{(11)}, b_3^{(13)}]^T,$$

$$\mathbf{N}(k) = [a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(4)}, a_3^{(2)}, a_1^{(5)}, a_3^{(4)}, a_2^{(5)}, \\ a_1^{(7)}, a_3^{(5)}, a_3^{(8)}, a_3^{(7)}, a_2^{(8)}, a_3^{(10)}, a_1^{(8)}, a_3^{(11)}, \\ a_1^{(10)}, a_2^{(11)}, a_3^{(13)}, a_1^{(11)}]^T,$$

$$\mathbf{Y}(k) = [b_1^{(1)}, b_1^{(13)}]^T,$$

$$\mathbf{R}(k) = [a_1^{(1)}, a_1^{(13)}]^T,$$

wobei $a_i^{(k)}$ das Eingangssignal am i -ten Tor des k -ten Adaptors, $b_i^{(k)}$ das Ausgangssignal am i -ten Tor des k -ten Adaptors sind.

Die entsprechende Struktur-Matrix ist wie folgt angegeben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{V}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{P} \\ \mathbf{C} & \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{N}(k) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Die Elemente der 9 Teilmatrizen können z.B. entweder Parameter der Adaptoren oder Null sein.

2.2.2 Analyse eines zeitdiskreten Systems

Um das Verhalten eines zeitdiskreten Systems zu analysieren, benutzt man normalerweise die Zustandsgleichungen, die ein System an den Eingängen und Ausgängen der Zustandsspeicher, an den Systemeingängen und -ausgängen

$$\mathbf{X}(k) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}(k-1) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}(k)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{X}(k-1) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}(k)$$

mit den konstanten Matrizen $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ beschreiben. Die Zustandsgleichungen können von der im vorigen Abschnitt dargestellten Struktur-Matrix durch eine geeignete Umformulierung abgeleitet werden.

Aus der Matrixengleichung (23) ergibt sich der Verbindungsvektor

$$\mathbf{N}_{(k)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)}) \quad (30),$$

wobei $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$ gilt und $\mathbf{I}$ eine Einheitsmatrix ist.

Einsetzen der Matrizengleichung (30) in die Matrizengleichungen (23) und (25) liefert dann die Zustandsgleichungen:

$$\mathbf{X}_{(k)} = (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (31)$$

$$\mathbf{Y}_{(k)} = (\mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (32).$$

Durch z-Transformation der Matrizengleichung (31) erhält man $\mathbf{X}_{(z)}$. Wird $\mathbf{R}_{(z)}$ in $\mathbf{Y}_{(z)}$ (*z-Transformierte der Matrizengleichung (32)*) eingesetzt, ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(z)} &= \mathbf{Y}_{(z)} / \mathbf{R}_{(z)} \\ &= (\mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot [\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G})]^{-1} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) + (\mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (33)$$

Aus Matrizengleichung (33) ergibt sich dann unmittelbar die charakteristische Gleichung

$$\left| \mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \right| = 0. \quad (34)$$

Die Zustandsgleichungen eines multidimensionalen zeitdiskreten Systems ermittelt man in der bereits zuvor geschilderten Weise aus der Matrizengleichung (28):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} &= (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k_1 - \delta_1, k_2 - \delta_2, \dots, k_n - \delta_n)} + \\ &+ (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} &= (\mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k_1 - \delta_1, k_2 - \delta_2, \dots, k_n - \delta_n)} + \\ &+ (\mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 1, \quad \Delta = \left\{ 0, 1 \right\}, \quad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \Delta.$$

Die Übertragungsfunktion läßt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\ &= (C + L \cdot H^{-1} \cdot G) \cdot [\Lambda - (A + F \cdot H^{-1} \cdot G)]^{-1} \cdot (B + F \cdot H^{-1} \cdot P) + (D + L \cdot H^{-1} \cdot P) \end{aligned} \quad (37)$$

worin n die Dimension des Digitalfilters, $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{ii}, \dots, \lambda_{nn})$,

für $\lambda_{ii} \in \mathbb{C}$, $c = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ist. z.B. gilt dabei $\lambda_{ii} = z_j$, falls $\delta_j = 1$.

2.2.3 Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realisierbarkeit von Digitalfiltern

Von früher eingeführten Definitionen einiger Vektoren ist bereits bekannt, daß die Verbindungsvektoren $V(k)$ und $N(k)$ die übertragenen Signale im Moment k des inneren Digitalfilter-Netzwerks sind. Es ist von großer Bedeutung für die Zustandssignale und Ausgangssignale, die inneren übertragenen Signale im Moment k zu empfangen. Aus Gleichung (30) erhält man das Matrizenpolynom für $N(k)$. Um den Ausdruck zu verdeutlichen, schreiben wir hier nochmal den Ausdruck

$$N(k) = M^{-1} \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R(k)).$$

In diesem Ausdruck steht eine inverse Matrix von M . Wir können dafür auch schreiben:

$$M^{-1} = (I - E)^{-1} = I + E + E^2 + \dots, \quad (38a)$$

falls $\|E\| < 1$ ist;

$$\text{oder } M^{-1} = (I - E)^{-1} = I + E + E^2 + \dots + E^{n-1}, \quad (38b)$$

falls n eine möglichst kleine endliche ganze Zahl ist, so daß

$$E^j = 0, \text{ falls } j \geq n.$$

Wird Gleichung (38a) in Gleichung (30) eingesetzt, ergibt sich für die inneren übertragenen Signale:

$$\begin{aligned} N_{(k)} = & I \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) + E \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) + \\ & + E^2 \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) + \dots \end{aligned} \quad (39).$$

Wegen der physikalischen Bedeutung im Digitalfilter-Netzwerk sollte die Matrizenreihe sowohl konvergieren, als auch ein Matrizenpolynom sein. Mit anderen Worten: die inverse Matrix zu M läßt sich als Matrizenpolynom (38b) darstellen. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} N_{(k)} = & I \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) + E \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) + \dots + \\ & + E^m \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P \cdot R_{(k)}) \end{aligned} \quad (40),$$

wobei $m = n - 1$ eine endliche ganze Zahl ist.

Durch eine weitere Betrachtung der Gleichungen (38), (39) und (40) kann man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Digitalfilter-Netzwerks finden.

Satz:

Ein Digitalfilter-Netzwerk ist realisierbar, wenn die notwendige und hinreichende Bedingung (41)

$$E^n = 0 \quad (41)$$

erfüllt ist, wobei n eine möglichst kleine endliche ganze minimale Zahl ist, so daß $E^j = 0$ wird, falls $j \geq n$, und E eine Teilmatrix der Struktur-Matrix des Digitalfilter-Netzwerks ist.

Beweis für die Eigenschaft:

1. notwendig

Realisierbarkeit eines Digitalfilter-Netzwerkes entspricht der Forderung, daß die Zustandssignale und Ausgangssignale im Moment k durch endliche Operationen (*schrittweise*) erreichbar sein können. Das heißt, daß die mathematischen Ausdrücke von Zustandsvektoren und Ausgangsvektor Matrizenpolynome sind. Bei der Betrachtung der Matrizengleichungen (23) und (25) wurde festgestellt, daß $N_{(k)}$ ein Matrizenpolynom sein muß, weil A , F , B , C , L , D die konstanten Matrizen sind, $X_{(k-1)}$ der Zustandsvektor ist und $R_{(k)}$

der Eingangsvektor ist. Aus einer weiteren Betrachtung der Matrixengleichung (30) kann man folgern, daß die inverse Matrix von $\mathbf{M}$ durch ein Matrizenpolynom ausgedrückt werden muß. So ergibt sich:

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 + \dots + \mathbf{E}^m .$$

Es folgt, daß $\mathbf{E}^n = \mathbf{0}$, wenn $n = m + 1$ gilt, wobei n, m ganze Zahlen sind.

2. hinreichend

Weil $\mathbf{E}^n = \mathbf{0}$, ist die inverse Matrix von $\mathbf{M}$ ein Matrizenpolynom bzw. $\mathbf{N}_{(k)}$ ein Matrizenpolynom. Daher existieren Darstellungen für Zustandsvektoren und Ausgangsvektor, die als Matrizenpolynome ausdrückbar sind. D.h., daß man die Zustandssignale und Ausgangssignale von Digitalfiltern im Moment k durch endliche Operationen erhalten kann. Für Wellendigitalfilter bedeutet der Begriff "endliche Operationen" einen mehrmaligen Streu-Prozeß, wie die Wellendigitalfilter ja auch wesentlich auf der Streuparametertheorie basieren.

Im bisherigen Veröffentlichungen wurde die qualitative Analyse für die Realisierbarkeit angegeben:

Damit eine Struktur als zeitdiskretes Digitalfilter-Netzwerk realisiert werden kann, muß unbedingt gewährleistet sein, daß jede Schleife mindestens einen Verzögerer enthält [40], [30].

In der vorliegenden Arbeit dagegen wird die Realisierbarkeit in mathematischer Form auch quantitativ analysiert. Die Überprüfung der Realisierbarkeit eines Digitalfilter-Netzwerks kann deshalb mit Hilfe des Rechners durchgeführt werden. Besonders erweist sich diese Methode für Anwendungen auf komplizierte Strukturen als außerordentlich vorteilhaft. Ausgehend von der notwendigen und ausreichenden Bedingung für Realisierbarkeit ist somit eine allgemeine schrittweise und systematisch Realisierungsmethode für Digitalfilter entstanden und für den Entwurf verfügbar geworden. Die detaillierten Einzelschritte dieser Methode sollen im folgenden durch Beispiele erläutert werden.

Wir betrachten die Teilmatrix $\mathbf{E}$ für einige der zuvor schon behandelten Beispiele.

Beispiel 1 :

$$\mathbf{E} = [0], \quad \mathbf{E}^1 = \mathbf{0} .$$

Beispiel 2 :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^3 = \mathbf{0}.$$

Beispiel 3 :

$$\mathbf{E}^8 = \mathbf{0}.$$

Die notwendige und ausreichende Bedingung ist in diesen Beispielen erfüllt.

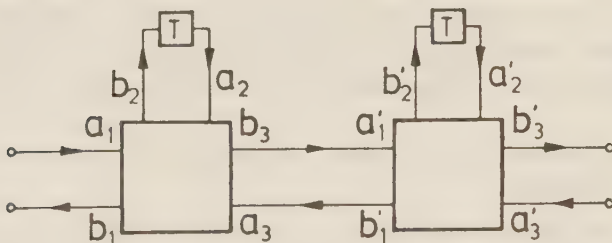


Bild 2.9 Eine direkte Verbildung zwischen zwei Adaptoren

Weiterhin sei ein Beispiel aus [2] betrachtet. Seine Teilmatrix $\mathbf{E}$ ist

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & S_{33} \\ S'_{11} & 0 \end{bmatrix}.$$

Die inverse Matrix von $\mathbf{M}$ kann man unmittelbar berechnen

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -S_{33} \\ -S'_{11} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & S_{33} \\ S'_{11} & 1 \end{bmatrix}}{1 - S'_{11} \cdot S_{33}}.$$

Die Inverse zu $\mathbf{M}$ existiert, und zwar ist $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}^j\| = 0$, weil S'_{11} , S_{33} Streuparameter sind.

Es folgt

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 + \dots$$

Aber die Inverse zu $\mathbf{M}$ ist kein Matrizenpolynom, d.h. n ist eine unendliche ganze Zahl. Deshalb ist dieses digitale Netzwerk nicht realisierbar. Wenn S_{11}' oder S_{33} gleich Null wird, ist das digitale Netzwerk realisierbar ($\mathbf{E}^2 = 0$). Das bedeutet auch, daß es eine reflexionsfreie Schleife gibt. Diese Analyse der neuen Methode stimmt mit den Ergebnissen [2] überein.

2.2.4 Digitale Nachbildung einer Kreuzschaltung (nicht kanonische Realisierung)

Kreuzschaltungen und Brücken-Schaltungen wurden in den letzten Jahren digital in kanonischer Form (*Brücken-Wellendigitalfilter*) nachgebildet und untersucht [2], [18], [20], [23]–[26], [41], [42]. Andere beidseitig resistiv abgeschlossene verlustfreie Brücken-Wellendigitalfilter [43], [44] bestehen sowohl aus den üblichen Adaptoren, als auch aus individuellen n -Tor-Adaptoren. Wenn ein überbrücktes T-Glied ausschließlich aus Parallel- und Serienadaptoren besteht, kann die digitale Nachbildung nicht durchgeführt werden [3]. Eine ähnliche Situation ist auch bei der digitalen Nachbildung einer Kreuzschaltung gegeben, die beidseitig resistiv abgeschlossen verlustfrei ist. Unter Verwendung des Satzes zur Realisierbarkeit ist die digitale Durchführbarkeit, die von der Struktur abhängig ist, leicht zu überprüfen.

Beispiel 4

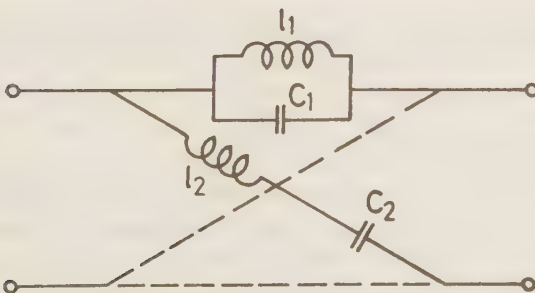


Bild 2.9.1 eine Kreuzschaltung

Das entsprechende Wellenflußdiagramm ist

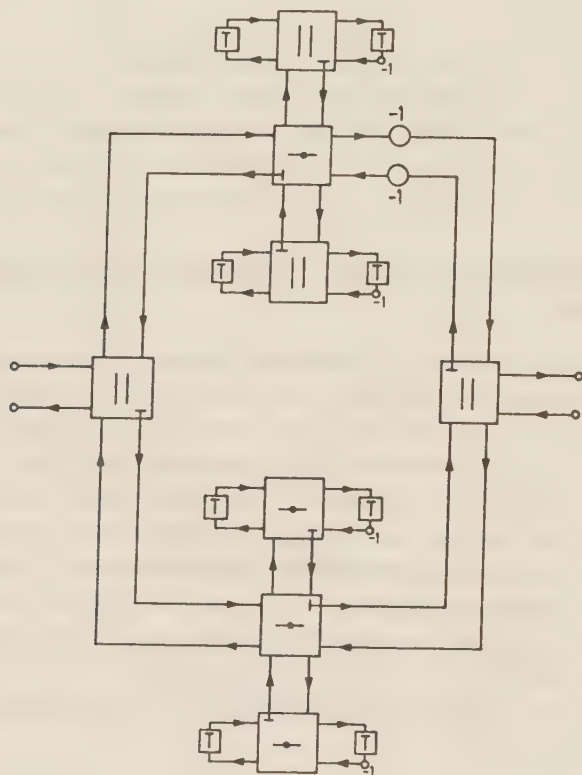


Bild 2.9.2 Zu der Schaltung in Bild 2.9.1 gehörendes Wellenflußdiagramm

Mit Hilfe des Rechners erhält man

$E^n \neq 0$, wobei n eine endliche ganze Zahl ist.

Eine solche digitale Schaltung ist deshalb nicht realisierbar. Wenn jedoch zwei Leitungselemente in diese Schaltung eingefügt werden, läßt sich die unrealisierbare Schaltung in eine realisierbare Schaltung umwandeln. Durch die äquivalente Transformation [45] wird die Schaltung wie folgt dargestellt.

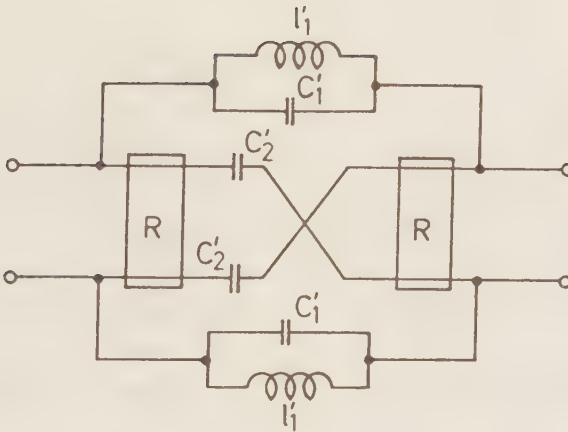


Bild 2.10.1 Eine äquivalente Schaltung zur Schaltung in Bild 2.9.1

Um die äquivalente Beziehung zwischen Bild 2.9.1 und Bild 2.10.1 zu finden, verwendet man den Satz von Bartlett [44]–[48].

Satz von Bartlett (1927) [47]:

"Ein Vierpol, der zu einer Symmetrieebene längssymmetrisch ist, ist einer X-Schaltung äquivalent, deren beide Längsleitwerte je gleich dem Kurzschlußleitwert der einen Vierpolhälfte und deren beide Schrägwiderstände je gleich dem Leerlaufwiderstand der einen Vierpolhälfte ist."

Nach dem Bartlettschen Satz muß man zunächst ein aufbausymmetrisches Zweitor in zwei gleiche spiegelbildlichen Zweitorhälften aufteilen (Bild 2.11.a und Bild 2.11.b). Dann können die Bauelemente in Bild 2.10.1 dadurch berechnet werden, daß man die Kurzschlußimpedanz der einen Zweitorhälfte gleich der Längsimpedanz der X-Schaltung (*Kreuzschaltung*) setzt und daß man die Leerlaufimpedanz der einen Zweitorhälfte gleich dem Schrägimpedanz der X-Schaltung (*Kreuzschaltung*) setzt (Bild 2.12.a und Bild 2.12.b, Bild 2.13.a und Bild 2.13.b).

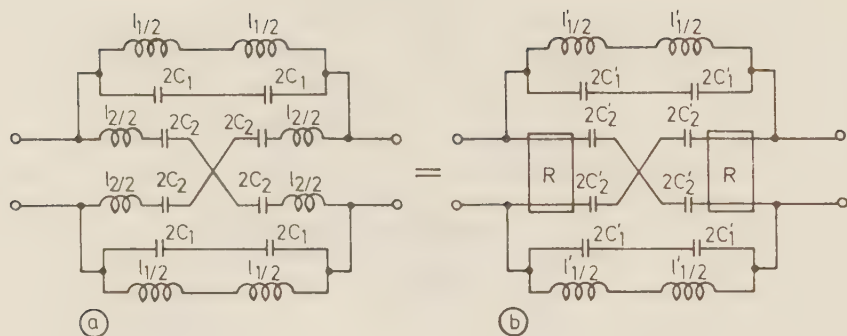


Bild 2.11 Ein aus zwei gleichen spiegelbildlichen Zweitorhälften bestehendes aufbausymmetrisches Zweitor

a) ohne Leitungselemente

b) mit Leitungselementen

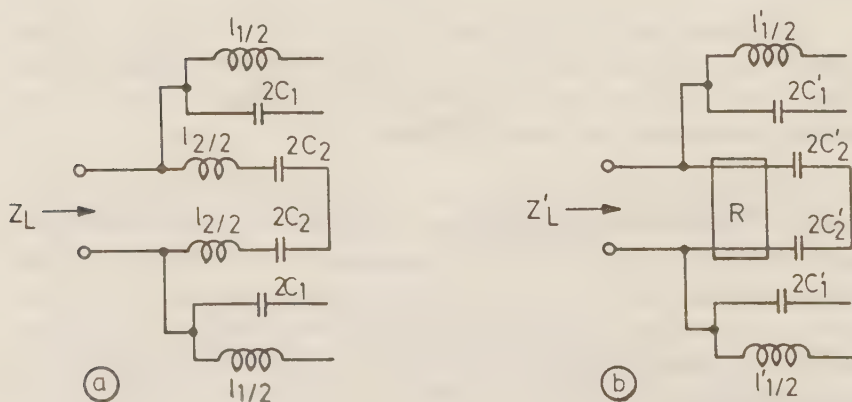


Bild 2.12 Impedanz bei Leerlauf der einen Zweitorhälfte

a) ohne Leitungselemente

b) mit Leitungselementen

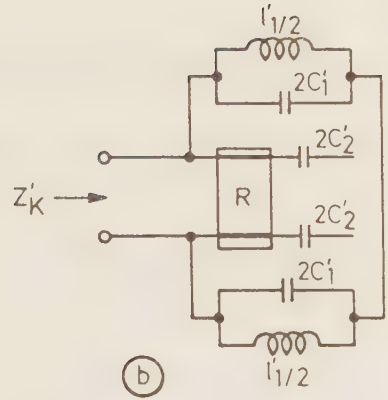
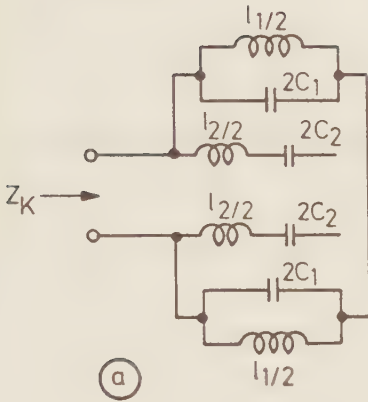


Bild 2.13 Impedanz bei Kurzschluß der einen Zweitorhälfte
a) ohne Leitungselemente b) mit Leitungselementen

Nach dem bereits behandelten **Bartlettschen** Satz sollte die Leerlaufimpedanz in **Bild 2.12.a** gleich der in **Bild 2.12.b** sein, die Kurzschlußimpedanz in **Bild 2.13.a** sollte gleich der in **Bild 2.13.b** sein, d.h.

$$Z_L = Z'_L \quad (42a)$$

$$Z_K = Z'_K . \quad (42b)$$

Das Leitungselement in **Tabelle 2.4.2** kann definiert werden durch

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cdot \cosh(PT/2) - R \cdot I_2 \cdot \sinh(PT/2) \\ I_1 &= (U_2/R) \cdot \sinh(PT/2) - I_2 \cdot \cosh(PT/2) . \end{aligned} \quad (43)$$

Daraus ergibt sich

$$Z'_L = \frac{\frac{1}{C'_2 \cdot \psi} + R \cdot \psi}{\frac{1}{R \cdot C'_2} + 1} . \quad (44)$$

Im **Bild 2.12.a** haben wir

$$Z_L = l_2 \cdot \psi + \frac{1}{c_2 \cdot \psi} . \quad (45)$$

Aus (42a), (44), (45) erhält man

$$l_2 = \frac{R}{1 + \frac{1}{R \cdot c_2'}} , \quad (46a)$$

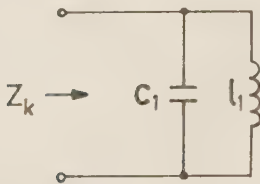
$$\frac{1}{c_2} = \frac{\frac{1}{c_2'}}{1 + \frac{1}{R \cdot c_2'}} . \quad (46b)$$

Diese Gleichungen werden nach den Werten der Bauelemente in Bild 2.12.b (mit Leitungselementen) aufgelöst:

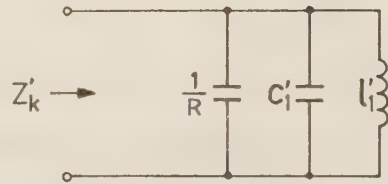
$$R = l_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{l_2 \cdot c_2}\right) = l_2 + 1/c_2 , \quad (47)$$

$$c_2' = \frac{c_2^2}{c_2 + \frac{1}{l_2}} . \quad (48)$$

Durch Umformulierung folgt aus Bild 2.13 das Bild 2.14.



(a)



(b)

Bild 2.14 Ersatzschaltbild von Bild 2.13

Man stellt unmittelbar fest, daß die folgenden Beziehungen zwischen Z_k in Bild 2.14.a und Z_k' in Bild 2.14.b wegen (42b) gelten:

$$l_1' = l_1 \quad (49)$$

$$c_1 = c_1' + 1/R . \quad (50)$$

Aus (50) ergibt sich

$$c_1' = c_1 - 1/R = c_1 - \frac{c_2}{1 + l_2 \cdot c_2} = \frac{c_2 + c_1 \cdot l_2 \cdot c_2 - c_2}{1 + l_2 \cdot c_2} \quad (51)$$

Weil die Kapazität c_1' keinesfalls einen negativen Wert haben kann, muß

$$c_2 < c_1 + c_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \quad (51a)$$

sein. Zusammengesetzt gilt dann als Beziehung zwischen Bild 2.9.1 und Bild 2.10.1 :

$$\begin{aligned} l_1' &= l_1 \\ c_1' &= c_1 - \frac{c_2}{1 + l_2 \cdot c_2} \\ R &= l_2 + \frac{1}{c_2} \\ c_2' &= \frac{c_2^2}{c_2 + \frac{1}{l_2}} \end{aligned} \quad (52)$$

Bild 2.15 soll zeigen, daß eine Kreuzschaltung erst in ein überbrücktes Glied ohne Leitungselemente, dann in ein überbrücktes Glied mit Leitungselementen umgewandelt werden kann. Unter Verwendung des **Bartlett'schen** Satz können die Bauelemente des überbrückten T-Gliedes mit Leitungselementen ermittelt werden (Bild 2.16), das aus der Umwandlung einer Kreuzschaltung entsteht.

$$\begin{aligned} l_1'' &= \frac{2 \cdot l_1 (1 + l_2 \cdot c_2)}{1 + c_2 \cdot (l_2 - l_1)} \\ c_1'' &= 0.5 \cdot c_1 \\ R &= l_2 + \frac{1}{c_2} \\ c_2'' &= \frac{2 \cdot c_2^2}{c_2 + \frac{1}{l_2}} \end{aligned} \quad (53)$$

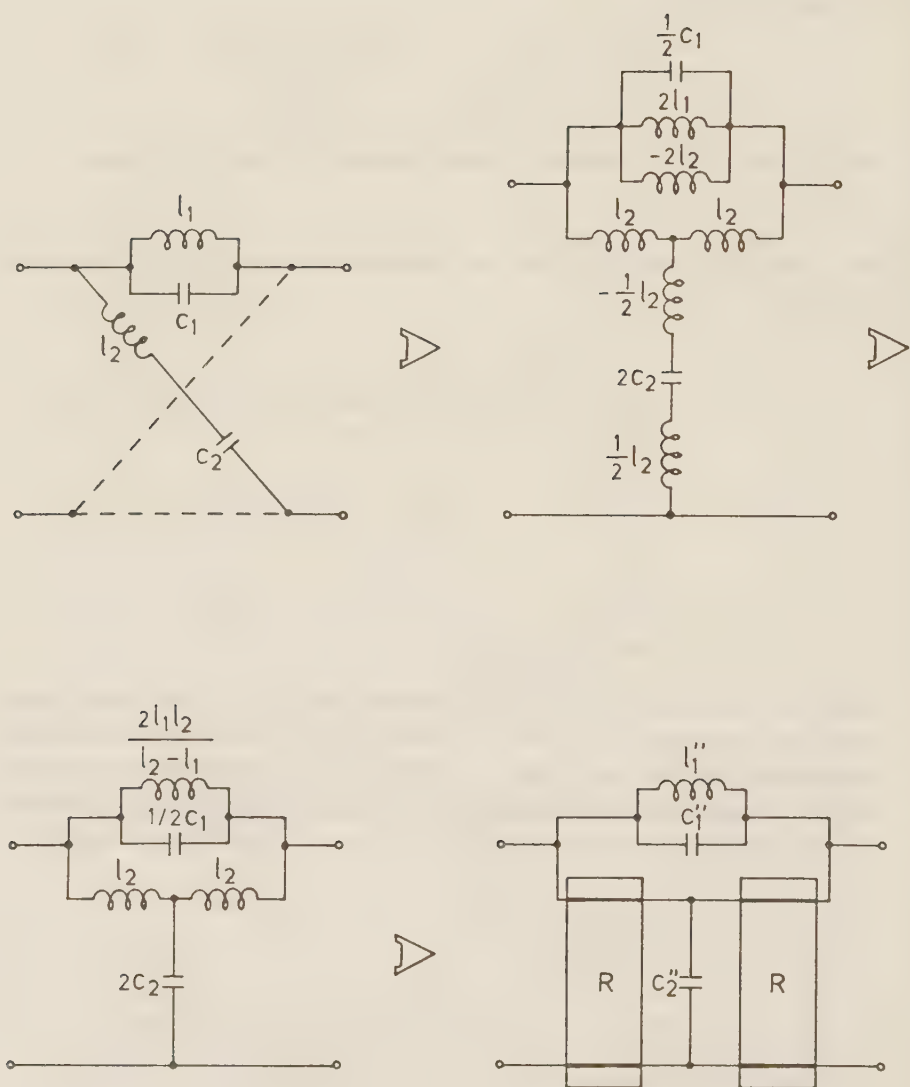
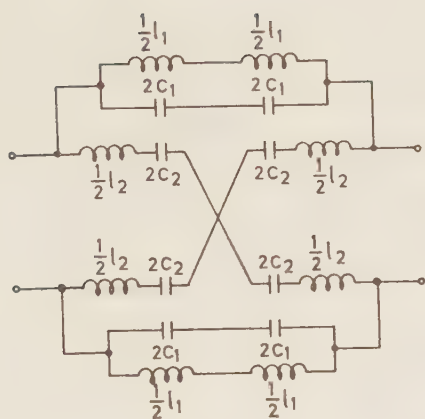
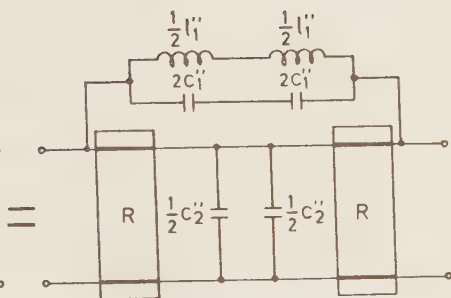


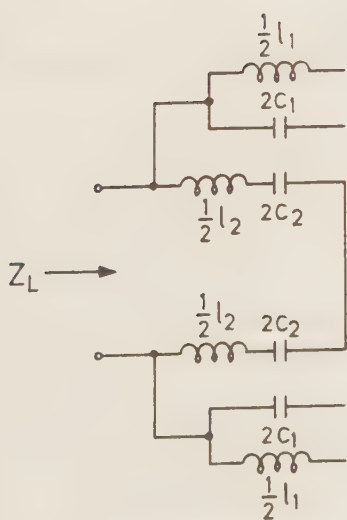
Bild 2.15 Ein überbrücktes T-Glied mit Leitungselementen, das von einer Kreuzschaltung hergeleitet wird



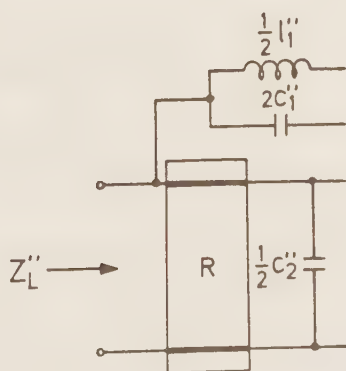
(a)



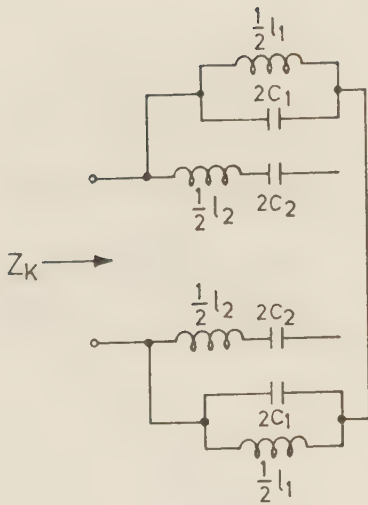
(b)



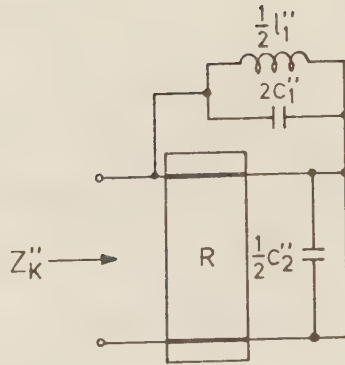
(c)



(d)



(e)



(f)

Bild 2.16 Verwendung des Bartlett'schen Satzes zur Bestimmung der Bauelemente des überbrückten T-Gliedes mit Leitungselementen

Aus dem oben erläuterten Grund ist hierbei $1 + c_2 \cdot l_2 > c_2 \cdot l_1$.

Wir können bemerken, daß Leitungselemente in zwei Fällen den gleichen Wert aufweisen.

Mit Hilfe der Leitungselemente können eine Menge nicht realisierbarer Digitalschaltungen in digital durchführbare Schaltungen überführt werden. Dazu muß man nur die Umrechnung im Referenzfilter, wie oben gezeigt, durchführen. Die entsprechenden Wellenflußdiagramme werden unter Benutzung der grundlegenden Transformation gemäß den Tabellen des vorigen Abschnitts ermittelt. Solche Wellendigitalfilter bestehen ausschließlich aus üblichen Adaptoren und Leitungselementen. Unter Verwendung der Standard-Bausteine (Adaptor) entsteht ein Wellendigitalfilter ohne individuelle Adaptoren.

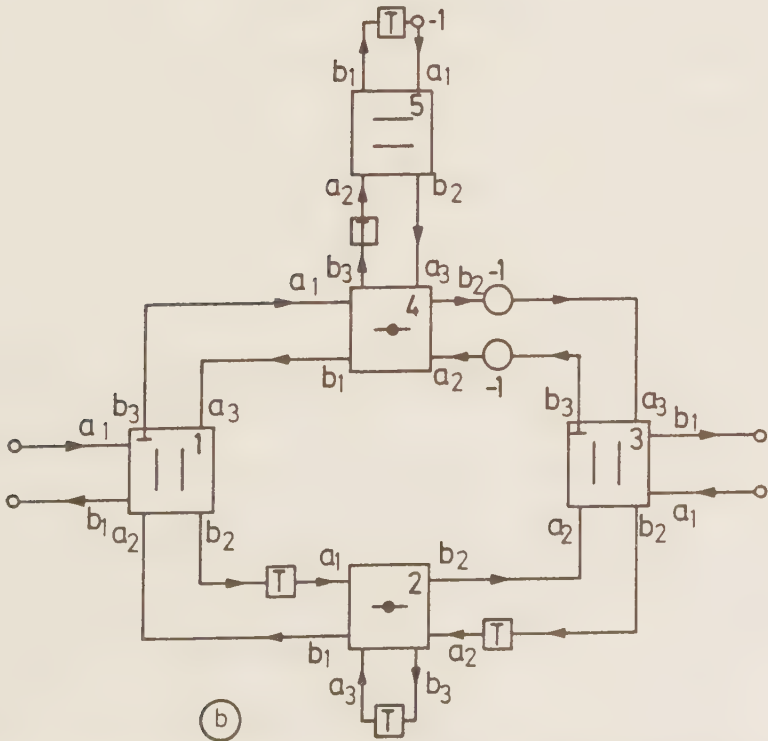
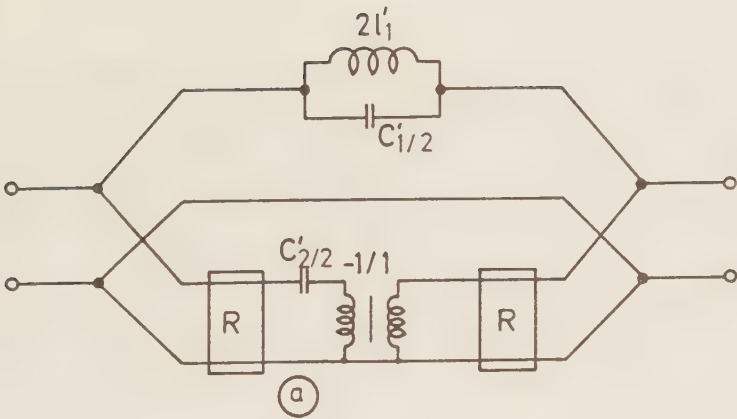


Bild 2.17 Eine digitale Nachbildung der Kreuzschaltung in Bild 2.9.1
 a) Ein Referenzfilter
 b) Das zugehörige Wellenflußdiagramm

Im Bild 2.17 ist eine digitale Nachbildung der Kreuzschaltung vom Bild 2.9.1 gezeichnet. Ein Referenzfilter davon ist in Bild 2.17.a dargestellt. In diesem Referenzfilter findet man einen idealen Übertrager, der das Übersetzungsverhältnis 1:(-1) hat, was durch die Überkreuzung angedeutet ist. Das zu diesem Referenzfilter gehörende Wellenflußdiagramm ist in Bild 2.17.b aufgezeichnet. Weil ein Serienadaptor im Zusammenschaltung mit Invertern an einem Tor verbunden sein muß, kommen in einem Zweig Inverter vor, diese verschwinden aber im anderen Zweig wegen des idealen Übertragers (Übersetzungsverhältnis 1:(-1)). Gemäß dem Wellenflußdiagramm können wir dann die Vektoren für die Struktur-Matrix in der Form:

$$\mathbf{X}_{(k)} = [b_2^{(1)}, b_2^{(3)}, b_3^{(2)}, b_3^{(4)}, b_1^{(5)}]^T,$$

$$\mathbf{X}_{(k-1)} = [a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_2^{(5)}, -a_1^{(5)}]^T,$$

$$\mathbf{V}_{(k)} = [b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_3^{(3)}, -b_2^{(4)}, b_1^{(5)}, b_1^{(4)}, b_3^{(1)}]^T,$$

$$\mathbf{N}_{(k)} = [a_2^{(1)}, a_2^{(3)}, -a_2^{(4)}, a_3^{(3)}, a_3^{(4)}, a_3^{(1)}, a_1^{(4)}]^T,$$

$$\mathbf{Y}_{(k)} = [b_1^{(1)}, b_1^{(3)}]^T,$$

$$\mathbf{R}_{(k)} = [a_1^{(1)}, a_1^{(3)}]^T.$$

schreiben.

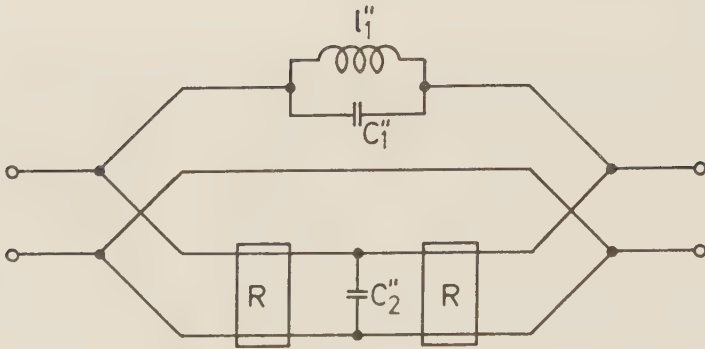
Mit diesen Vektoren kann man die Struktur-Matrix (54) sofort aufstellen.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{23}^{(1)} & 0 & S_{21}^{(1)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{22}^{(3)} & 0 & S_{23}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21}^{(3)} \\
 S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(2)} & S_{33}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{32}^{(4)} & 0 & S_{33}^{(4)} & 0 & S_{31}^{(4)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{12}^{(5)} - S_{11}^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{32}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{31}^{(3)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{22}^{(4)} & 0 & -S_{23}^{(4)} & 0 & -S_{21}^{(4)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{22}^{(5)} - S_{21}^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{12}^{(4)} & 0 & S_{13}^{(4)} & 0 & S_{11}^{(4)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{31}^{(1)} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{13}^{(1)} & 0 & S_{11}^{(1)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12}^{(3)} & 0 & S_{13}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11}^{(3)}
 \end{bmatrix}$$

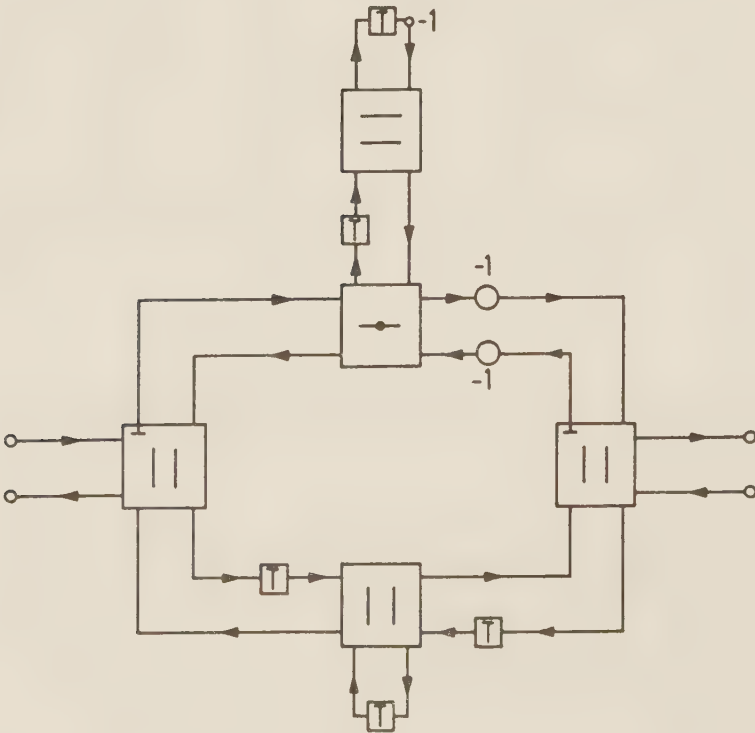
(54)

Unter Berücksichtigung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Realisierbarkeit findet man $E^3 = 0$, so daß die digitale Schaltung sich als durchführbar erweist.

Eine digitale Nachbildung des überbrückten T-Glieds ist in Bild 2.18 dargestellt. Bei der Betrachtung der Bild 2.17.b und 2.18.b erkennt man, daß die beiden Wellenflußdiagramme, die ursprünglich aus derselben Kreuzschaltung hergeleitet wurden, ähnlich sind. Daraus folgt, daß die Äquivalenzschaltungen in Referenzfiltern als gleiche Strukturen in Wellenflußdiagramm auftreten können.



(a)



(b)

Bild 2.18 Eine digitale Nachbildung des überbrückten T-Gliedes

a) Referenzfilter

b) Das zugehörige Wellenflußdiagramm

2.2.5 Eine allgemeine Realisierungsmethode für Digitalfilter

Wir kommen nun zu dem besonders wichtigen Abschnitt, in dem die allgemeine Realisierungsmethode für Digitalfilter gründlich erörtert werden soll. Im Abschnitt 2.2.3 haben wir uns schon mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Realisierbarkeit befasst. Daraus kann die allgemeine Realisierungsmethode für Digitalfilter abgeleitet werden. Aus (30), (31), (32), (40) folgen wie die Formen der Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k)} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{(k)} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)}) \\ &= [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{(k)}] + [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] + [\mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \\ &\quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] + \dots + [\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^m \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] \\ &= \mathbf{Z}_1 + \sum_{i=0}^m \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{Z}_3 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(k)} &= [\mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}_{(k)}] + [\mathbf{L} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] + [\mathbf{L} \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \\ &\quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] + \dots + [\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^m \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)})] \\ &= \mathbf{Z}_2 + \sum_{i=0}^m \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{Z}_3 \end{aligned} \quad (56),$$

$$\text{wobei } \mathbf{Z}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad , \quad (57)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad , \quad (58)$$

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k)} \quad (59).$$

Aus (55) und (56) ergeben sich die Schritte für die Realisierung:

1. Alle Eingangssignale im $\mathbf{R}_{(k)}$ und Zustandssignale im $\mathbf{X}_{(k-1)}$ fließen in die Addierer. Multiplizierer. Adaptoren und Bausteine, die aus Addierern und Multiplizierern bestehen. Durch Operationen kann man die Ausgangssignale $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ der Nicht-Zustandsspeicher erhalten. Die Ergebnisse für das digitalisierte Vorgehen sind in Matrizen-Schreibweise darzustellen durch:

$$\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(1)} = \mathbf{Z}_1, \quad \hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(1)} = \mathbf{Z}_2, \quad \hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(1)} = \mathbf{Z}_3;$$

2. Die Signale $\hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(2)} = \hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(1)}$ fließen als Eingangssignale in die Nicht-Zustandsspeicher, während die Signale $\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(1)}$ in den Akkumulatoren,

mit denen die Multiplizierer und Addierer versehen sind, gespeichert bleiben. Einige Ausgangssignale der Nicht-Zustandsspeicher werden summiert, d.h.

$$\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(2)} = \hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(1)} + \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(2)} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{z}_3 ,$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(2)} = \hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(1)} + \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(2)} = \mathbf{z}_2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{z}_3 ,$$

während die anderen Signale, die zu den Verbindungsspeicherwerten $\mathbf{V}_{(k)}$ gehören, nicht summiert zu werden brauchen. D.h.

$$\hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(2)} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(2)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z}_3 ;$$

3. Wiederholung des Schritts 2;

.

i. Die Signale $\hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(i)} = \hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(i-1)}$ fließen als Eingangssignale in die Nicht-Zustandsspeicher, während die Signale $\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(i-1)}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(i-1)}$ in den Akkumulatoren gespeichert bleiben. Dann werden die Zustandssignale

$$\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(i)} = \hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(i-1)} + \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{z}_1 + \sum_{j=0}^{i-2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^j \cdot \mathbf{z}_3 \quad (60).$$

Die Ausgangssignale werden

$$\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(i)} = \hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(i-1)} + \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{z}_2 + \sum_{j=0}^{i-2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^j \cdot \mathbf{z}_3 \quad (61).$$

Die inneren übertragenen Signale werden

$$\hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{E}^{i-1} \cdot \mathbf{z}_3 \quad (62).$$

.

n+1. Die Signale $\hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(n+1)} = \hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(n)}$ fließen als Eingangssignale in die Nicht-Zustandsspeicher, während die Signale $\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(n)}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(n)}$ in den Akkumulatoren gespeichert bleiben. Dann werden die Zustandssignale

$$\hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(n+1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(n)} + \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(n+1)} = \mathbf{z}_1 + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^j \cdot \mathbf{z}_3 \quad (63).$$

Die Ausgangssignale werden

$$\hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(n+1)} = \hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(n)} + \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(n+1)} = \mathbf{z}_2 + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^j \cdot \mathbf{z}_3 \quad (64).$$

Die inneren übertragenen Signale werden

$$\hat{\mathbf{V}}_{(k)}^{(n+1)} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(k)}^{(n+1)} = \mathbf{E}^n \cdot \mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \quad (65).$$

Im Moment k werden die Zustandssignale

$$\mathbf{X}_{(k)} = \hat{\mathbf{X}}_{(k)}^{(n+1)} \quad (66)$$

gespeichert. Im Moment k sind die Ausgangssignale

$$\mathbf{Y}_{(k)} = \hat{\mathbf{Y}}_{(k)}^{(n+1)} \quad (67).$$

Führt man anstelle der Vektoren $\mathbf{X}_{(k)}$, $\mathbf{X}_{(k-1)}$, $\mathbf{V}_{(k)}$, $\mathbf{N}_{(k)}$, $\mathbf{Y}_{(k)}$, $\mathbf{R}_{(k)}$ in Gl. (55) und (56) die Vektoren

$$\mathbf{X}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \mathbf{X}_{(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2, \dots, k_n-\delta_n)}, \mathbf{V}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \\ \mathbf{N}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \mathbf{Y}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)},$$

ein, so lassen sich mit der vorgeschlagenen Realisierungsmethode auch multidimensionale zeitdiskrete Systeme beschreiben.

Das heißt dann:

$$\mathbf{X}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \mathbf{z}_1 + \sum_{i=0}^m \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{z}_3 \quad (68)$$

$$\mathbf{Y}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \mathbf{z}_2 + \sum_{i=0}^m \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{z}_3 \quad (69),$$

$$\text{wobei } \mathbf{z}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2, \dots, k_n-\delta_n)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \quad (70)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2, \dots, k_n-\delta_n)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}, \quad (71)$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{(k_1-\delta_1, k_2-\delta_2, \dots, k_n-\delta_n)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \quad (72)$$

sind.

Ausgehend von dieser Realisierungsmethode folgt das Signalflußdiagramm in der logischen Schaltung (Bild 2.19)

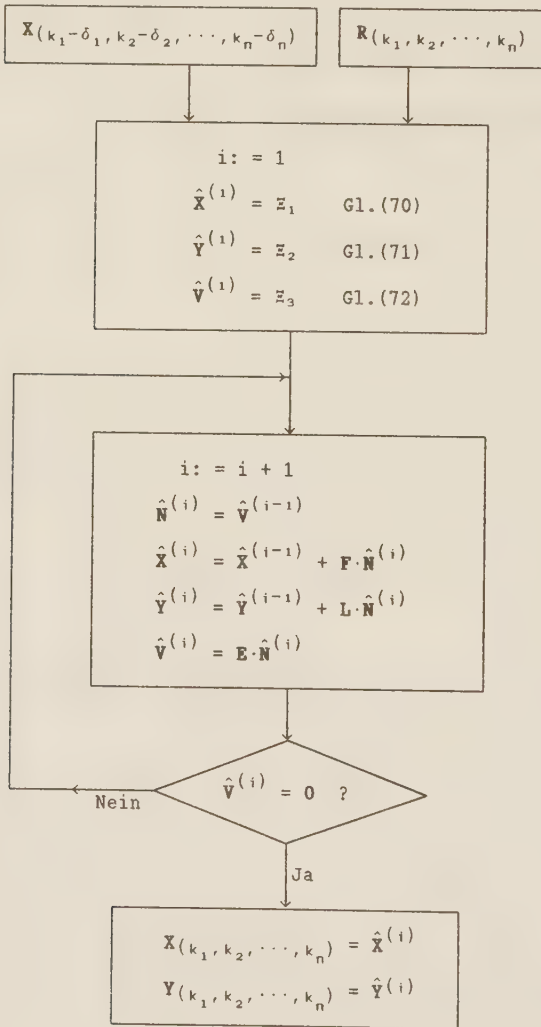


Bild 2.19 Signalflußdiagramm in der logischen Schaltung

Bei der Realisierung bedeuten hier die Produkte von jeweils zwei Matrizen (z.B. $\hat{F} \cdot \hat{N}^{(i)}$, $\hat{L} \cdot \hat{N}^{(i)}$, $\hat{E} \cdot \hat{N}^{(i)}$ in Bild 2.19) nicht eine direkte Multiplikation der zwei Matrizen, sondern Operationen in Addierern, Multiplizierern und Adaptoren, die parallel durchgeführt werden.

Bei der Behandlung der Realisierung einer Zusammenschaltung gelten jeder Adaptor, Addierer und Multiplizierer als ein Baustein, dessen zugängliche Eingänge und Ausgänge berücksichtigt werden. Die inneren unzugänglichen Signale jedes Bausteins werden erst im einzelnen Baustein (Addierer, Multiplizierer und Adaptor) behandelt. Für eine einfache Struktur ist i sehr klein, wobei die benötigten Schritte durch eine geeignete Kombination reduziert werden können, und die Addierer und Multiplizierer nicht mit Akkumulatoren versehen sein müssen, wie sie für die kompliziertere Struktur unbedingt nötig sind.

Die oben eingeführte Realisierungsmethode ist anwendbar auf allgemeine Digitalfilter. Die Methode entspricht einer "Faltung" im Zeitbereich der Signalverarbeitung, die im Frequenzbereich durch Produkte der Betriebsübertragungsfaktoren der in Ketten geschalteten Zweiteore dargestellt werden kann. Für ein realisierbarer Digitalfilter bedeutet das, daß die Anzahl der benötigten Schritte endlich ist, d.h. durch die diskreten Schritte dieser "Faltung" formen sich die Zustandssignale und Ausgangssignale im Moment k . Für Wellendigitalfilter werden alle Adaptoren einigemal parallel durchgerechnet. Die benötigten Schritte hängen von der Matrix E ab, bzw. von dem Exponenten n der Matrix E ab, daß so klein gewählt wird, daß

$$E^j = 0 \text{ ist, falls } j \geq n.$$

Dies wurde im vorigen Abschnitt erläutert

Beispiel 3 : $E^6 = 0$, Hier folgt für die benötigten Schritte $i = 6+1 = 9$,
die Ordnung des Tiefpasses ist gerade 9.

Beispiel 4 : $E^3 = 0$, Hier ist $i = 3+1 = 4$.

Nun nehmen wir an, daß n ein minimaler Exponent der Matrix E , so daß

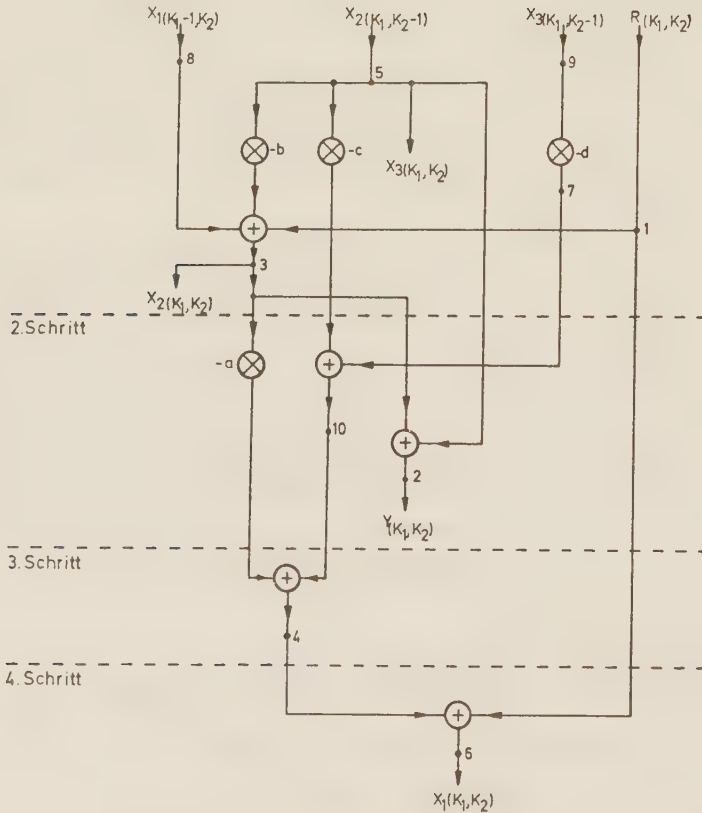
$$E^j = 0 \text{ , falls } j \geq n.$$

Dann gibt, daß die $n+1$ Schritte für die Realisierung benötigt werden.

Im Beispiel 1 ist: $E^1 = 0$, also $i = 1+1 = 2$ ist.

Betrachten wir das Beispiel 2 mit $E^3 = 0$, so brauchen wir 4 Schritte im Moment k .

1. Schritt



Bei der Betrachtung des Signalflußdiagramm haben wir bemerkt, daß $X_3(k_1, k_2)$, $X_2(k_1, k_2)$ im 1. Schritt existieren, $Y(k_1, k_2)$ im 2. Schritt existiert, $X_1(k_1, k_2)$ im 4. Schritt existiert. Eine weitere Betrachtung

zeigt, daß am Knoten 3 ein Signal im 1. Schritt existiert, das sowohl als Zustandssignal $X_{2(k_1, k_2)}$ als auch als ein weiter übertragenes Signal gilt. Denn das Signal Ks_3 soll sowohl im Zustandsvektor als auch im Verbindungsvektor auftreten.

Unter Verwendung dieser Realisierungsmethode ist eine sogenannte nicht realisierbare Schaltung digital durchführbar.

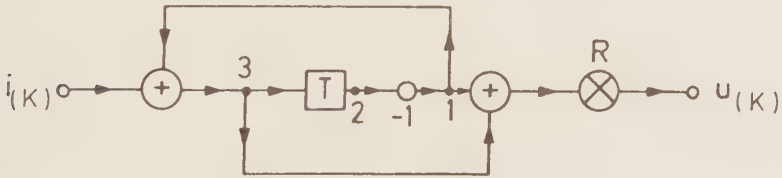


Bild 2.20 Eine digitale Nachbildung einer Induktivität (Strom-Spannung)

Wir definieren die Vektoren:

$$\mathbf{X}(k) = Ks_3,$$

$$\mathbf{X}(k-1) = Ks_2,$$

$$\mathbf{V}(k) = [Ks_1, Ks_3]^T,$$

$$\mathbf{N}(k) = [Ks_1, Ks_3]^T,$$

$$\mathbf{Y}(k) = U(k),$$

$$\mathbf{R}(k) = I(k).$$

Die entsprechende Struktur-Matrix ist:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & R & R & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse zu $\mathbf{M}$ ist:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Zustandsgleichungen sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k)} &= (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{I}_{(k)} \\ &= -1 \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + 1 \cdot \mathbf{I}_{(k)} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(k)} &= (\mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{I}_{(k)} \\ &= -2\mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{(k-1)} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_{(k)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Die Übertragungsfunktion kann man wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} H(z) &= -2\mathbf{R} \cdot (z + 1)^{-1} \cdot 1 + \mathbf{R} \\ &= \frac{z - 1}{z + 1} \cdot \mathbf{R} = \psi \cdot \mathbf{R} = H(\psi). \end{aligned} \quad (75)$$

Weil $\mathbf{E}^2 = \mathbf{0}$ ist, braucht die digitale Durchführung drei Schritte:

1. Das Zustandssignal fließt zum Inverter, das Knotensignal Ks_1 existiert, das ferner weiter übertragen wird.
2. Das Knotensignal Ks_1 und Eingangssignal $I_{(k)}$ gelten als zwei Eingänge eines Addierers und es existiert das Knotensignal Ks_3 , das sowohl zum Zustandsspeicher fließt (als Zustandssignal im Moment $k+1$), als auch als weiter übertragenes Signal aufgefaßt wird.
3. Die Knotensignale Ks_1 und Ks_3 gelten als zwei Eingänge eines Addierers. Das Ausgangssignal des Addierers ist Eingangssignal eines Multiplizierers, dessen Koeffizient $\mathbf{R}$ ist. Das Ausgangssignal des Multiplizierers ist ja das Ausgangssignal dieser digitalen Schaltung.

Man kann zeigen, daß das im 2. Schritt existierende Zustandssignal $\mathbf{X}_{(k)}$ und das im 3. Schritt existierende Ausgangssignal $\mathbf{U}_{(k)}$ mit den Ergebnissen (73), (74) übereinstimmen.

2.2.6 Berechnung der Übertragungsfunktion der Digitalfilter im Frequenzbereich

Auf der Basis der vorgestellten Realisierungsmethode können wir nun die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich berechnen. Die Voraussetzung für die Berechnung der Übertragungsfunktion ist, daß der zugehörige Digitalfilter realisierbar ist (vid. [30]-[32], [49]). Konkret gesprochen muß die Inverse zu $\mathbf{M}$ ein Matrizenpolynom sein. Die Zustandsgleichungen (31), (32) für ein eindimensionales System und (35), (36) für ein multidimensionales System wurden schon im Abschnitt 2.2.2 angegeben. Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion jeweils mit (33), (37). Unter Verwendung der Formeln (35), (36) und (37) kann man z.B. die Zustandsgleichungen und Übertragungsfunktion für das **Beispiel 2** ermitteln. Bei der Berechnung ist die Art und Weise wichtig, wie die Inverse zu $\mathbf{M}$ ermittelt wird. Statt der direkten Ermittlung der Inversen zu $\mathbf{M}$ sollte das Matrizenpolynom

$$\mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 + \dots + \mathbf{E}^m$$

ermittelt werden. Der Grund dafür ist in erster Linie die Überprüfung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Realisierbarkeit. Außerdem entspricht diese Berechnungsmethode der digitalen Durchführung im Zeitbereich, so daß die Ergebnisse das Verhalten des Digitalfilters bei der Simulation richtig beschreiben. Mit Hilfe eines Programms läßt sich die Übertragungsfunktion im Rechner berechnen. Hier sei ein einfaches Beispiel (**Beispiel 2**) entsprechend vorgeführt:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a & ab-c & -d \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P} = [1-a \quad 1 \quad 0]^T$$

$$C + L \cdot M^{-1} \cdot G = [1 \quad 1-b \quad 0]^T$$

$$D + L \cdot M^{-1} \cdot P = [1]$$

Die Zustandsgleichungen sind durch die Form

$$\begin{bmatrix} X_1(k_1, k_2) \\ X_2(k_1, k_2) \\ X_3(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & ab-c & -d \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(k_1-1, k_2) \\ X_2(k_1, k_2-1) \\ X_3(k_1, k_2-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot R(k_1, k_2)$$

$$Y(k_1, k_2) = [1 \quad 1-b \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} X_1(k_1-1, k_2) \\ X_2(k_1, k_2-1) \\ X_3(k_1, k_2-1) \end{bmatrix} + 1 \cdot R(k_1, k_2)$$

dargestellt. Sie stimmen mit den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Signalen überein, die unter Verwendung der allgemeinen Realisierungsmethode in den unterschiedlichen Schritten entstehen. Nach der Formel (37) läßt sich die Übertragungsfunktion wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) &= [1 \quad 1-b \quad 0] \cdot \left(\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & ab-c & -d \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{z_2(z_1 + 1) \cdot (z_2 + 1)}{z_1 \cdot z_2^2 + a \cdot z_2^2 + b \cdot z_1 \cdot z_2 + c \cdot z_2 + d} \\ &= \frac{(1 + z_1^{-1}) \cdot (1 + z_2^{-2})}{1 + a \cdot z_1^{-1} + b \cdot z_2^{-1} + c \cdot z_1^{-1} \cdot z_2^{-1} + d \cdot z_1^{-1} \cdot z_2^{-2}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für die Übertragungsfunktion stimmt mit dem Ergebnis in [31] überein.

2.3 Aufbau der Adaptoren von Wellendigitalfiltern

Nachdem die allgemeine Realisierungsmethode beschrieben wurde, sei die Untersuchung auf die Wellendigitalfiltern zurückgeführt. Abschnitt 2.2.1 befaßte sich mit den Definitionen einiger Bauelemente, der Quelle und den Adaptoren, die unter Verwendung von Spannungswellen und Leistungswellen hergeleitet werden. Wegen der unterschiedlichen Darstellung der Adaptoren unter Verwendung von Spannungswellen und im Gegensatz dazu Leistungswellen verlangt der Aufbau der Adaptoren eine unterschiedliche Struktur, während kein Unterschied zwischen Realisierungsmethoden in Bezug auf die Zusammenschaltung besteht, wo der Adaptor als ein Baustein betrachtet wird. In vorliegendem Abschnitt befassen wir uns mit dem Vergleich zwischen den unterschiedlichen Konzepten der Adaptoren unter Verwendung von Spannungswellen und Leistungswellen. Die Konzepte der Adaptoren in Spannungswellen-Darstellung werden direkt aus [11] entnommen.

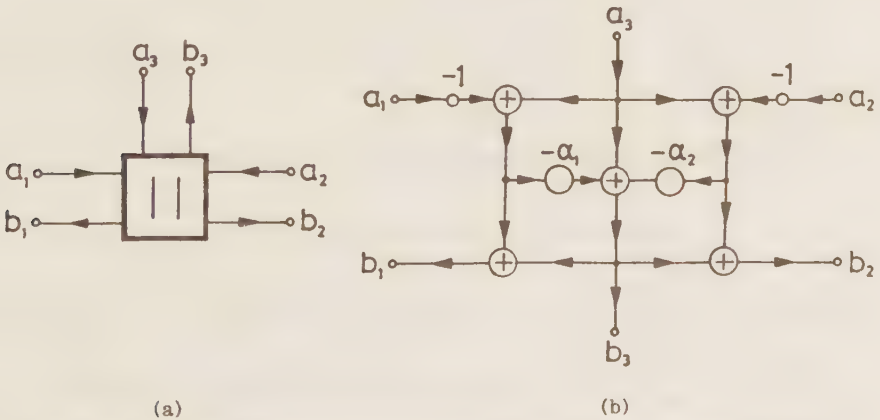


Bild 2.21 a) Ein 3-Tor-Paralleladaptor in Spannungswellen-Darstellung
b) Zugehöriges Signalflußdiagramm

Bild 2.21 zeigt einen 3-Tor-Paralleladaptor und das zugehörige Signalflußdiagramm in Spannungswellen-Darstellung. Bild 2.22 gibt das entsprechende logische Schaltbild (ohne Befehlimpulssignal aus dem Steuerwerk) an. Der Adaptor braucht bei der Realisierung 2 Multiplizierer, 6 Addierer, 2 Inverter, weil nur 2 Eingänge zugelassen sind. Die gesamte Laufzeit eines Adaptors

Bild 2.23 zeigt einen 3-Tor-Serienadaptor und das zugehörige Signalflußdiagramm in Spannungswellen-Darstellung. Bild 2.24 gibt das entsprechende logische Schaltbild (ohne Befehlsimpulssignal aus dem Steuerwerk) wieder. Der Adaptor braucht bei der Realisierung 2 Multiplizierer, 6 Addierer, 1 Inverter. Die gesamte Laufzeit des Adaptors ohne Berücksichtigung der Forderung des Steuerwerks beträgt

$$T = T_1 + 5 T_2 + 1 T_3 \quad (77).$$

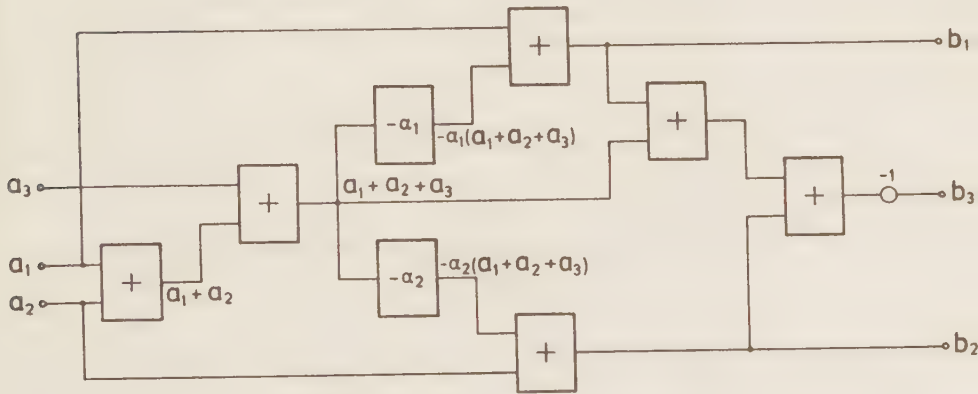


Bild 2.24 Zu Bild 2.23 gehörendes logisches Schaltbild

In Gl. (16) ist die Adaptoren-Gleichung in Leistungswellen-Darstellung angegeben:

$$b_v = \gamma_v (\gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \gamma_3 \cdot a_3) - a_v.$$

Das allgemeine Glied für b_1 , b_2 , b_3 ist

$$\gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \gamma_3 \cdot a_3 \quad (78).$$

Im folgenden sind der Adaptor, das zugehörige Signalflußdiagramm und die entsprechende logische Schaltung angegeben.

Der Adaptor braucht bei der Realisierung 6 Multiplizierer, 5 Addierer, 3 Inverter (Paralleladaptor) oder 6 Inverter (Serienadaptor). Die gesamte Laufzeit ist für einen Serienadaptor

$$T = 2 T_1 + 3 T_2 + T_3. \quad (79)$$

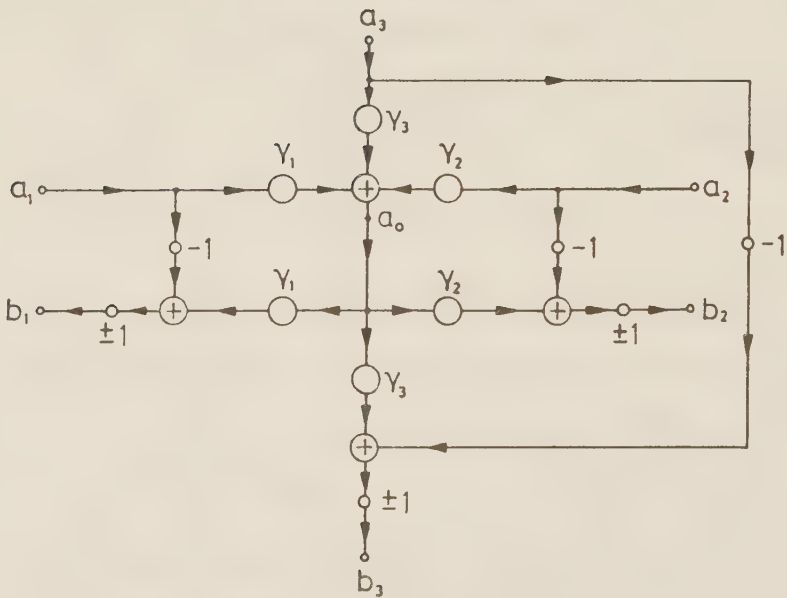
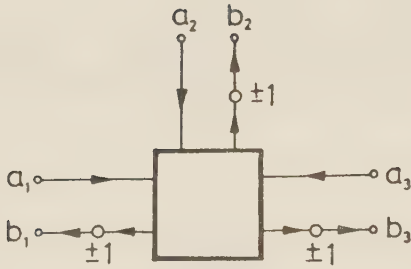


Bild 2.25 a) 3-Tor-Adaptor in Leistungswellen-Darstellung
b) Ein zugehöriges Signflußdiagramm

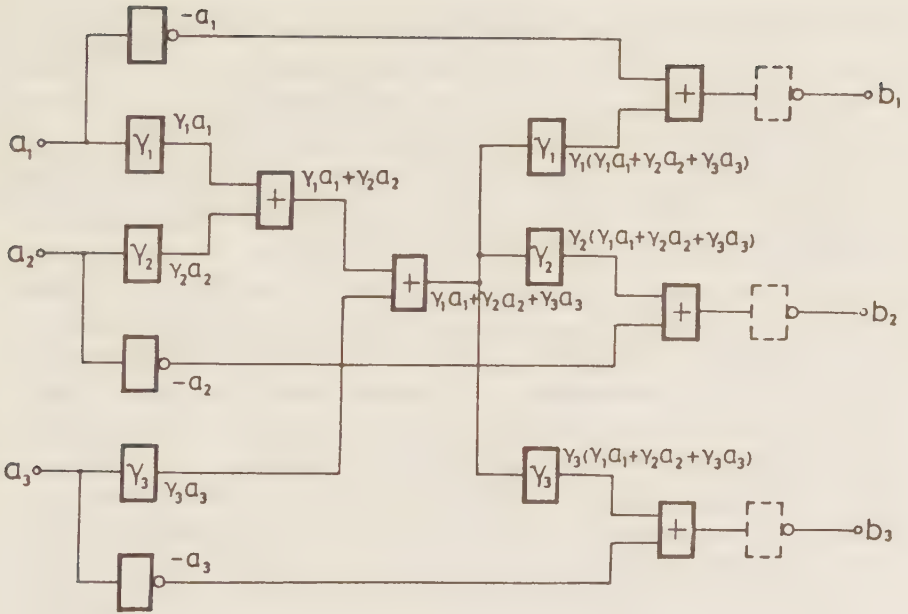


Bild 2.26 Zu Bild 2.25 gehörendes logisches Schaltbild

Der Adaptor braucht bei der Realisierung 6 Multiplizierer, 5 Addierer, 3 Inverter (Paralleladaptor) oder 6 Inverter (Serienadaptor). Die gesamte Laufzeit ist für einen Serienadaptor

$$T = 2 T_1 + 3 T_2 + T_3 .$$

Für einen Paralleladaptor ist die gesamte Laufzeit

$$T = 2 T_1 + 3 T_2 , \quad (80)$$

wobei T_1 die Laufzeit eines Multiplizierers, T_2 die Laufzeit eines Addierers, und T_3 die Laufzeit eines Inverters ist.

Weil die Laufzeit eines Multiplizierers größer als die Laufzeit T_3 eines Inverters ist, wird T_1 im ersten Operationsschritt berücksichtigt. Man kann die 3-Tor-Adaptor-Gleichung umschreiben in

$$b_v = s_{v1} \cdot a_1 + s_{v2} \cdot a_2 + s_{v3} \cdot a_3 \quad (81) .$$

Die benötigte Laufzeit eines Adaptors beträgt

$$T = T_1 + 2 T_2 \quad (82) .$$

Da die Laufzeit eines Multiplizierers viel größer als die eines Addierers gleicher Technik, sollte die Anzahl der Multiplizierer so gering wie möglich gehalten werden. Besonders wichtig ist, daß die Multiplikation in derselben Taktzeit ausgeführt wird. Da bei Anwendung von Parallelverfahren Rechenzeit gespart werden kann, sollten die Operationen in der logischen Schaltung möglichst parallel durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung der optimalen Laufzeit ist die gesamte Laufzeit eines n-Tor-Adaptors:

n-Tor	Additionszeit	Multiplikationszeit
n = 2	1 T_2	1 T_1
n = 3, 4	2 T_2	1 T_1
n = 5, 6, 7, 8	3 T_2	1 T_1
n = 9, \dots, 16	4 T_2	1 T_1
n = 17, \dots, 32	5 T_2	1 T_1
⋮	⋮	⋮

Die gesamte Laufzeit der Zusammenschaltung von Wellendigitalfiltern hängt nicht nur von der Zahl der Multiplizierer und Addierer, sondern auch von der Struktur der logischen Schaltung ab. Wie die Eigenschaften bei Realisierung in der Struktur von Wellendigitalfiltern aussehen, wird in den nächsten Abschnitten gründlich erörtert.

3. Stabilitätseigenschaften von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen - Darstellung

Die Begriffe von Pseudopassivität und inkrementaler Pseudopassivität wurden in [3], [5], [50] definiert und diskutiert. Darüber findet man zahlreiche Veröffentlichungen, in denen über die Zusammenhänge zwischen den durch die Wortlängenbegrenzung bedingten Effekten und Digitalfilterstrukturen untersucht wurden [51]-[54], [56]-[64]. Die verschiedenen Strukturen, die bisher für Digitalfilter vorgeschlagen worden sind, verhalten sich sehr unterschiedlich im Hinblick auf diese Auswirkungen bzw. die diesbezüglich zu treffenden Maßnahmen [54]. Verschiedene Strukturen von Digitalfiltern bedeuten bei der digitalen Ausführung in gewissem Sinne stets verschiedene Arithmetik, die sich wegen der Effekte, die durch die Wortlängenbegrenzung entstehen, in numerischer Stabilität und Fehlerverhalten voneinander unterscheiden [65], [66]. Die Struktur von Wellendigitalfiltern, die die Passivitätseigenschaften von LC-Analogfiltern richtig nachbilden, bringt dabei stabile Arithmetik bei der digitalen Ausführung mit sich. Deshalb besitzen die Wellendigitalfilter auch hier viele attraktive Eigenschaften, insbesondere sind sie stabiler bei der Realisierung als andere Digitalfilter.

Unter Verwendung von Leistungswellen läßt sich die Stabilitätseigenschaft von Wellendigitalfiltern, die bei anderen Digitalfiltern schwer zu garantieren ist, sowohl bei der theoretischen Analyse als auch bei der Realisierung gewährleisten. Jeder einzelne Baustein und die Zusammenschaltung von PWDF können bei der Wortlängenbegrenzung pseudopassiv sein, d.h. der Vorgang, mit dem die Eingangssignale durch ein PWDF zu Ausgangssignalen umgeformt werden, kann durch eine stabile Arithmetik dargestellt werden. Daher existieren Überläufe nur sehr selten, während die bei VWDF durchgeführte Rechnungen gar nicht darauf abzielen. Die Gesamtstabilität hängt von der Erhaltung der Pseudopassivität in jedem einzelnen Baustein ab, wobei die innere Stabilität viele attraktive Stabilitätseigenschaften unter endlicher Arithmetik automatisch mitliefert [104]. Bei der Realisierung spielt selbstverständlich die innere und die externe Stabilität von PWDF eine entscheidende Rolle. In diesem Kapitel hier soll der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften bei Zusammenschaltung von Bausteinen und der Struktur der Bausteine untersucht werden. Insbesondere soll die innere Stabilität von Adaptoren unter nichtlinearen Bedingungen untersucht werden.

Ferner soll in diesem Kapitel auch die wichtige Eigenschaft der Stabilität von PWDF untersucht werden.

3.1 Eigenschaften der Bausteine unter Verwendung von Leistungswellen

Im 2. Kapitel wurden bereits einige Elemente, die Quelle und Adaptoren unter Verwendung von Leistungswellen definiert. Diese Definitionen beziehen sich auf eine orthogonale Transformation zwischen Eingängen und Ausgängen jedes Bausteins unter Verwendung der Streuparametertheorie. Die Eigenschaften der Zusammenschaltung von PWDF werden jedoch nun von den Eigenschaften jedes Bausteins stark beeinflusst. Besonders sind die Adaptoren, die die Streutheorie und die Anpassungsbedingungen des Netzwerks charakterisieren, die wichtigsten Bausteine bei der Realisierung von WDF. Deshalb müssen zunächst die Eigenschaften von Adaptoren gründlich untersucht werden.

1. Die Streumatrix der n - Tor - Adaptoren in Leistungswellen - Darstellung ist vollständig symmetrisch, d.h.

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (83)$$

Aus Gl. (17) ist diese Eigenschaft leicht ablesbar.

2. Die Streumatrix der n - Tor - Adaptoren in Leistungswellen - Darstellung ist eine orthogonale Matrix. Sie besitzen Verlustfreiheitseigenschaften, d.h.

$$S_*^T \cdot S = I, \quad (84a)$$

falls $\gamma^T \cdot \gamma = 2$ ist, mit $\gamma^T = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Die Beziehung läßt sich aus der orthogonalen Matrix herleiten.

3. Die Streumatrix der n - Tor - Adaptoren in Leistungswellen - Darstellung besitzen Passivitätseigenschaften, wenn

$$\gamma^T \cdot \gamma \leq 2 \text{ ist.} \quad (84b)$$

Aus Gl. (17) folgt

$$I - S^T \cdot S = (2 - \gamma^T \cdot \gamma) \cdot \gamma \cdot \gamma^T.$$

Weil die Matrix $\gamma \cdot \gamma^T$ semi-positiv definit ist, wird also die Matrix $I - S^T \cdot S$ auch semi-positiv definit, falls

$$2 - \gamma^T \cdot \gamma \geq 0 ,$$

nämlich muß (84b) erfüllt sein.

4. Die Streumatrix der n - Tor - Adaptoren in Leistungswellen - Darstellung erfüllt die notwendige und hinreichende Bedingung für orthogonale Transformation. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^n S_{ij} \cdot S_{ik} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (85)$$

$$\text{mit } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} ,$$

S_{ij} ist reell.

Außerdem ist für jeden Adaptor die Beziehung

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} \cdot S_{kj} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (86)$$

erfüllt.

Mit Gl. (84) sind die Beziehungen (85), (86) nachprüfbar. Bemerkenswerterweise ist die Beziehung (84) also eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine orthogonale Transformation.

5. Die Elemente der Streumatrix der n-Tor-Adaptoren in Leistungswellen - Darstellung sind alle nicht größer als 1, d.h.

$$|S_{ij}| \leq 1 . \quad (87)$$

Denn aus Gl. (85), Gl. (86) ergibt sich im allgemeinen

$$\sum_{j=1}^n |S_{ij}|^2 = 1 . \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (88)$$

Aus Gl. (88) folgt somit $|S_{ij}| \leq 1$.

6. Die Determinante der Streumatrix der n-Tor-Adaptoren ist gleich ± 1 .

Die Eigenschaften der Streumatrix aller anderen Bausteine der Tabellen des 2. Kapitels sind unter Verwendung von Leistungswellen gleichermaßen wie die von Adaptoren darstellbar.

3.2 Eigenschaften der Struktur-Matrix von PWDF

Bevor wir die Eigenschaften der Struktur-Matrix von PWDF untersuchen, betrachten wir die orthogonalen Digitalfilter, deren Struktur durch eine Struktur-Matrix darstellbar sind.

Die Struktur-Matrix wurde im 2. Kapitel definiert durch:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{F} & \vdots & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{G} & \vdots & \mathbf{E} & \vdots & \mathbf{P} \\ \hline \mathbf{C} & \vdots & \mathbf{L} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} .$$

Betrachten wir ein Digitalfilter, dessen individuelle Bausteine bzw. Adaptoren als orthogonale Transformation dargestellt werden können, so können wir eine entsprechende Struktur-Matrix finden, deren zur Beschreibung der Struktur-Matrix benötigte Vektoren ausschließlich aus Eingängen und Ausgängen solcher Bausteine bestehen und somit die alle Komponenten der Vektoren unabhängig voneinander sind. Es gilt dann die Aussage:

Ein Digitalfilter kann als ein orthogonales Digitalfilter betrachtet werden, wenn die entsprechende Struktur-Matrix durch eine orthogonale Matrix darzustellen ist.

Beweis:

Weil die Struktur-Matrix eine orthogonale Matrix ist, folgt sie den Beziehungen (85) oder (86). Daraus folgt für beliebige $X_{i(k-1)}$, $N_{i(k)}$ und $R_{i(k)}$

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2(k) + \sum_{i=1}^{\mu} V_i^2(k) + \sum_{i=1}^m Y_i^2(k) = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2(k-1) + \sum_{i=1}^{\mu} N_i^2(k) + \sum_{i=1}^e R_i^2(k) , \quad (89)$$

wobei in üblicher Weise $m = e$ ist.

Da $\sum_{i=1}^{\mu} V_i^2(k) = \sum_{i=1}^{\mu} N_i^2(k)$ ist, so ergibt sich aus (89)

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2(k) + \sum_{i=1}^m Y_i^2(k) = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2(k-1) + \sum_{i=1}^e R_i^2(k) \quad (90)$$

$$\text{oder} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (91)$$

Nehmen wir an, daß $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}$,

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G} \quad , \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad ,$$

mit $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$, so ist $\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix}$.

Im Abschnitt 2.2.2 wurden die Zustandsgleichungen folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{X}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}(k-1) + (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}(k)$$

$$\mathbf{Y}(k) = (\mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}(k-1) + (\mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}(k) .$$

Wir können nun die Zustandsgleichungen in einer anderen Form schreiben.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (92)$$

Die quadratische Form von Gl. (92) ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}^T \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (93)$$

Vergleichen wir die Gleichungen (91) und (93), läßt sich daraus folgern:

$$\hat{\mathbf{S}}^T \cdot \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{I} \quad (94)$$

So ist die Matrix $\hat{\mathbf{S}}$ tatsächlich eine orthogonale Matrix. Das entsprechende Digitalfilter ist ein orthogonales Digitalfilter [10].

Die Struktur-Matrix von PWDF ist dann ebenfalls eine orthogonale Matrix, weil die Struktur-Matrix als ein Produkt aus einigen orthogonalen Matrizen betrachtet werden kann. Z.B. ist in Gl. (54) eine Struktur-Matrix angegeben, die aus Streuparametern, Streuparametern mit einem Minus-

Vorzeichen und Null besteht. Diese Struktur-Matrix kann man als eine Matrix betrachten, die nur aus Streuparametern der Adaptoren und Null besteht, indem man sie von links mit einer orthogonalen Matrix z.B.

Diag[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1] und von rechts zweimal mit einer orthogonalen Matrix multipliziert, etwa mit

Diag[1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] und

Diag[1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].

Aufgrund der Eigenschaften der Adaptoren unter Verwendung von Leistungswellen erhalten wir für die Struktur-Matrix $\tilde{S}$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{S}_{ij} \cdot \tilde{S}_{ik} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (95)$$

Somit ist die Struktur-Matrix eine orthogonale Matrix. PWDF sind daher orthogonale Digitalfilter, wenn die Beziehung $\gamma^T \cdot \gamma = 2$ in jedem Adaptor erfüllt ist. Außerdem besitzt die Struktur-Matrix alle Eigenschaften, die zu orthogonalen Matrizen gehören. Hier sei betont, daß dann auch die Simulation ganz exakt erfolgen kann, denn für jedes Bauelement im Analogfilter kann man den entsprechenden Baustein der digitalen Nachbildung im Wellenflußdiagramm finden.

3.3 Systemeigenschaften von PWDF

Bekanntlich weist die Systemmatrix $\hat{A}$ bei der Zustandsdarstellung die wesentlichen Eigenschaften der Stabilität auf [32]. Z.B. zu ihrer Überprüfung müssen sich sämtliche Eigenwerte der Systemmatrix innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene befinden. Wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{A}^k = 0,$$

bedeutet dies, daß die Ausgangsfolge beschränkt für beschränkte Eingangsfolgen ist. Hierbei überprüft man die Systemmatrix sowohl unter linearen Bedingungen als auch unter nichtlinearen Bedingungen, falls die Systemmatrix unter nichtlinearen Bedingungen bestimmt werden kann. Die Eigenschaften der Systemmatrix, besonders ihre Norm müssen eventuell ebenfalls analysiert werden, damit der Dynamikbereich mit Hilfe der Zustandsdarstellung berechnet werden kann. Aus dem letzten Abschnitt wissen

wir, daß die zur Zustandsdarstellung gehörende Matrix $\hat{S}$ eine orthogonale Matrix ist. Die Systemmatrix $\hat{A}$ von PWDF, die eine Teilmatrix von $\hat{S}$ ist, hat manche ähnlichen Eigenschaften wie die von $\hat{S}$, z.B. gilt $|\hat{a}_{ij}| \leq 1$.

Ausgehend von den Eigenschaften der orthogonalen Matrix kann man die Norm der Systemmatrix $\hat{A}$ von PWDF ermitteln.

Die zur Zustandsdarstellung gehörende Matrix $\hat{S}$ besteht aus vier Teilmatrizen: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$. Darunter sind die Matrizen $\hat{B}$, $\hat{C}$ kein Nullmatrizen, weil der Ausgangsvektor $Y_{(k)}$ eine Funktion des Zustandsvektors $X_{(k-1)}$ und des Eingangsvektors $R_{(k)}$ ist. Ganz gleich, ob es sich um rekursive Digitalfilter oder um nichtrekursive Digitalfilter handelt, beschreibt die Zustandsdarstellung selbstverständlich keinen Digitalfilter, wenn die Matrizen $\hat{B}$ und $\hat{C}$ nur Nullelemente aufweisen. Die l_2 -Norm des Ausgangsvektors verlangt sowohl

$$\|Y_{(k)}\|_2^2 > 0, \text{ als auch nicht } \|Y_{(k)}\|_2^2 = 0.$$

Für ein WDF, das als ein Zweitor betrachtet werden kann, ist die Matrix $\hat{C}^T \cdot \hat{C}$ eine positiv definite Matrix, wenn die WDF kanonisch realisiert werden. Daher gilt

$$\|Y_{(k)}\|_2^2 > 0. \quad (96)$$

Im Fall der nicht kanonischen Form (z.B. Abzweigfilter) ist die Matrix $\hat{C}^T \cdot \hat{C}$ semi-positiv definit, weil die Systemmatrix $\hat{A}$ einige redundante Eigenwerte aufweist, die entweder gleich +1 oder gleich -1 sind. Offensichtlich ist ein Digitalfilter, das zwei Ausgänge hat, besonders günstig, um die Bedingung

$$\|Y_{(k)}\|_2^2 > 0 \quad (Y_1^2(k) + Y_2^2(k) > 0 \text{ in einem Zweitor})$$

auf jeden Fall zu erfüllen, nämlich, daß $Y_1(k)$ und $Y_2(k)$ sind nicht gleichzeitig Null sein sollen.

Die Gleichung (90) kann man in l_2 - Norm - Schreibweise folgendermassen schreiben:

$$\|X_{(k)}\|_2^2 + \|Y_{(k)}\|_2^2 = \|X_{(k-1)}\|_2^2 + \|R_{(k)}\|_2^2$$

Nehmen wir nun an, daß $R(k) = 0$ ist, so folgt

$$\|X(k)\|_2^2 + \|Y(k)\|_2^2 = \|X(k-1)\|_2^2 \quad (97a)$$

$$\text{und} \quad X(k) = \hat{A} \cdot X(k-1) \quad (97b)$$

So ergibt sich aus Gl. (97a) und Gl. (96)

$$\|X(k)\|_2^2 < \|X(k-1)\|_2^2 \quad (98)$$

Aus Gl. (97b) ergibt sich

$$\|X(k)\|_2 < \|\hat{A}\|_2 \cdot \|X(k-1)\|_2, \quad (99)$$

wobei

$$\|\hat{A}\|_2 = \text{Max} \frac{\|\hat{A} \cdot X(k-1)\|_2}{\|X(k-1)\|_2} \quad (X(k-1) \neq 0) \quad (100)$$

in üblichem Sinne definiert ist.

So folgt daraus:

$$\|\hat{A}\|_2 < 1 \quad (101)$$

Aus gleichem Grund ist $\|\hat{D}\|_2 < 1$.

Nun können wir die Tendenz der l_2 Norm der Matrix $\hat{A}^k$ ($k > 0$) abschätzen.

Weil $\hat{A}$ eine quadratische Matrix ist, hat sie die Eigenschaft

$$\|\hat{A} \cdot \hat{A}\|_2 < \|\hat{A}\|_2 \cdot \|\hat{A}\|_2 = \|\hat{A}\|_2^2 \quad (102)$$

Weiterhin ist somit

$$\|\hat{A}^k\|_2 < \|\hat{A}^{k-1}\|_2 \cdot \|\hat{A}\|_2 < \|\hat{A}\|_2^k \quad (103)$$

$$\text{Es folgt} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}^k\|_2 < \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}\|_2^k = 0 \quad (104)$$

$$\text{Es ergibt sich} \quad \|\hat{A}^k\|_n < \tau \cdot \|\hat{A}\|_2^k, \quad (105)$$

wobei τ positive Konstanten sind und n eine beliebige ganze Zahl ist.

Aus Gl. (104) und Gl. (105) ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}^k\|_1 = 0, \quad (106a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}^k\|_{\infty} = 0. \quad (106b)$$

Selbstverständlich konvergiert die Matrix $\hat{A}^k$ ($k \rightarrow \infty$) gegen die Nullmatrix.

Außerdem kann man $\|\hat{A}\|_2$ durch die maximale charakteristische Wurzel von Matrix $\hat{A}^T \cdot \hat{A}$ abschätzen.

Unter Verwendung von Leistungswellen hat das zur Folge, daß die l_2 - Norm der Systemmatrix $\hat{A}$ kleiner als 1 ist. Wegen dieser wesentlichen Eigenschaft wird die Stabilität von PWDF sichergestellt, welche sowohl die einzelnen Bausteine wie auch deren Zusammenschaltung betrifft. In gewissem Sinne bedeutet also Pseudo-passivität der Digitalfilter [2], [8], daß die l_2 - Norm der Systemmatrix $\hat{A}$ kleiner als 1 ist bzw. die l_2 - Norm der Matrix $\hat{A}^k$ ($k \rightarrow \infty$) gegen die Nullmatrix konvergiert. Ausgehend von der Systemmatrix von PWDF kann man nun auch die Tendenz der Systemmatrix von VWDF analysieren. Weil der Unterschied zwischen Leistungswellen und Spannungswellen in einer Konstante besteht, wird die Systemmatrix von VWDF

$$\hat{A}' = G^{-1} \cdot \hat{A} \cdot G, \quad (107)$$

wobei $\hat{A}'$ die Systemmatrix von VWDF, $\hat{A}$ die Systemmatrix von PWDF,

$$G = \text{Diag}[\sqrt{G_1}, \sqrt{G_2}, \dots, \sqrt{G_N}] \text{ sind.}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}'^k\|_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|G^{-1} \cdot \hat{A}^k \cdot G\|_2 \\ &\leq \|G^{-1}\|_2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{A}^k\|_2 \cdot \|G\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Systemmatrix von PWDF kann man so die l_2 - Norm der Exponenten der Systemmatrix von VWDF erhalten.

Die aufgenommene Pseudoleistung für PWDF ist definiert durch

$$P = \sum_{\nu=1}^n (|A_{\nu}|^2 - |B_{\nu}|^2) \quad (108a)$$

$$P(k) = \sum_{v=1}^n (a_v^2(k) - b_v^2(k)) , \quad (108b)$$

wobei A_v , B_v , $a_v(k)$, $b_v(k)$ die Leistungswellen sind.

Da für die Pseudoleistung ein dem Energiesatz entsprechender Erhaltungssatz gilt, ist ein Wellendigitalfilter insbesondere dann stabil, wenn es konkret pseudopassiv ist, d.h. wenn seine Elemente und Adaptoren individuell pseudopassiv sind [3]. Also müssen

$$P = \sum_{v=1}^n (|A_v|^2 - |B_v|^2) \geq 0 \quad (109a)$$

$$P(k) = \sum_{v=1}^n (a_v^2(k) - b_v^2(k)) \geq 0 \quad (109b)$$

sein.

Unter endlicher Arithmetik muß noch

$$|b_v| < |b_{v0}| \quad (110)$$

für nichtlineare Funktion erfüllt sein [51], wobei b_v die Ausgangssignale der Adaptoren unter nichtlinearen Bedingungen darstellen, b_{v0} diejenigen unter linearen Bedingungen darstellen, d.h. die Maßnahme einer Betragsabschneidung der Adaptoren bei der digitalen Durchführung ergriffen wird.

Im allgemeinen schreibt man die Zustandsgleichungen in folgender Form:

$$\mathbf{X}(k) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}(k-1) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}(k)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{X}(k-1) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}(k) .$$

Bei der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten existiert Stabilität, wenn die Zustandsgrößen unter nichtlinearen Bedingungen dem Betrag nach nie größer als die Zustandsgrößen unter linearen Bedingungen sind [51], [32].

Es gilt somit

$$|X_{i(k)q}| \leq |X_{i(k)}| , \quad (111)$$

wobei $X_{i(k)q}$ und $X_{i(k)}$ die i-te Zustandsgröße jeweils unter nichtlinearen Bedingungen und linearen Bedingungen ausdrücken.

Allerdings stehen Gl. (111) und Gl. (110) nicht in Widerspruch zueinander.

d.h. b_v , b_{v0} in Gl. (110) sind Signale, die zu einem Verzögerer führen [54]. Die Stabilität eines linearen Systems ist sichergestellt, wenn sämtliche Eigenwerte der Systemmatrix kleiner als Eins sind.

Die Untersuchung der charakteristischen Gleichung

$$|z \cdot I - \hat{A}| = 0$$

liefert die Forderung an ein stabiles System, daß alle charakteristischen Wurzeln der Gleichung innerhalb des Einheitskreises der z - Ebene liegen.

Gemäß der Definition der Struktur-Matrix wird $\hat{A} = A + F \cdot M^{-1} \cdot G$. Durch diese Berechnung kann man die Stabilität für ein konkretes System überprüfen. Z.B. treten im Beispiel 3 13 verzögerer auf.

Die charakteristischen Wurzeln sind

$z = 0.1735709 + j0.0000000$	$ z = 0.1735709$
$z = 0.1178678 + j0.5440274$	$ z = 0.5566494$
$z = 0.1178678 + j-0.544027$	$ z = 0.5566494$
$z = 0.03983791 + j0.8372465$	$ z = 0.8381938$
$z = 0.03983791 + j-0.8372465$	$ z = 0.8381938$
$z = 0.001310959 + j0.9486817$	$ z = 0.9486826$
$z = 0.001310959 + j-0.9486817$	$ z = 0.9486826$
$z = -0.01136890 + j0.9884579$	$ z = 0.9885233$
$z = -0.01136890 + j-0.9884579$	$ z = 0.9885233$
$z = -0.9999988 + j0.0000000$	$ z = 0.9999988$
$z = -0.9999997 + j0.0000000$	$ z = 0.9999997$
$z = -0.9999998 + j0.0000000$	$ z = 0.9999998$
$z = -1.0000000 + j0.0000000$	$ z = 1.0000000.$

Bild 3.1 zeigt ihre Lage in der z -Ebene.

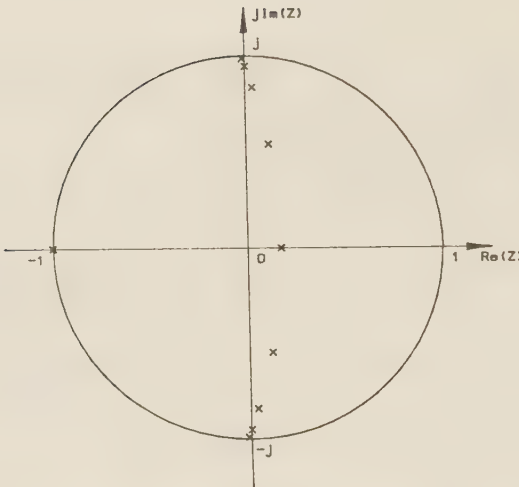


Bild 3.1 Polen in der z-Ebene (Tiefpaß 9. Grades)

Darunter gibt es vier Wurzeln, die alle den Wert -1 haben. Die anderen 9 Wurzeln befinden sich innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene. Bei der nicht kanonischen Realisierung weist ein gemäß dem Referenzfilter entstehendes Wellenflußdiagramm doch noch einige redundante Verzögerer auf (im obigen Beispiel hat also die Systemmatrix vier Eigenwerte, die alle gleich -1 sind). Mit weiteren systematischen Verfahren kann man die redundanten Verzögerer ebenfalls eliminieren [3].

Bei der Herstellung in einer Chip-Massenproduktion sollte jedoch die entsprechende Technologie so einfach wie möglich sein. Deshalb muß auch der Einfluß der redundanten Verzögerer auf die Übertragungsfunktion untersucht werden. Betrachtet sei daher das zugehörige Referenzfilter (Bild 3.2).

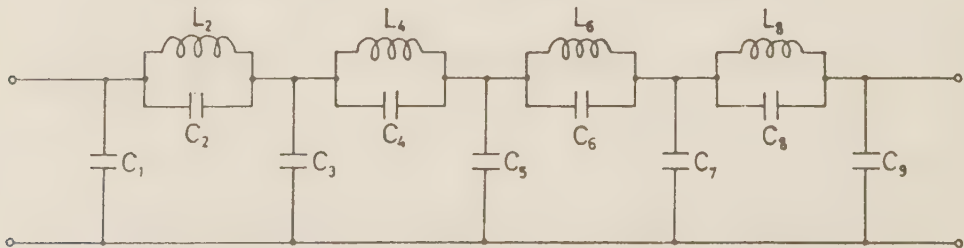


Bild 3.2 Ein zugehöriges Referenzfilter

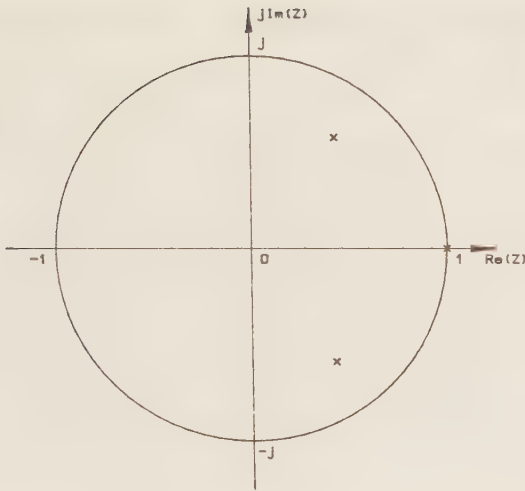


Bild 3.3 Pole in der z-Ebene (Allpaß 2. Grades)

In den Tabellen 2.4.3 und 2.4.4 sind die kanonischen Polynome für die konkrete Teilschaltung angegeben. Darunter gibt es einen Faktor $(z + 1)$, so daß im Zähler der Übertragungsfunktion der Faktor $(z + 1)^4$ auftritt. Deshalb verschwindet der Faktor $(z + 1)^4$ im Nenner. Im allgemeinen kann man die charakteristische Gleichung für Abzweig-Digitalfilter wie folgt schreiben:

$$|z \cdot I - (A + F \cdot M^{-1} \cdot G)| = 0$$

$$\Rightarrow (z \pm 1)^m \cdot (z^{n-m} + \dots + a_0) = 0$$

Hierbei gilt:

Grad = $n - m$ = Zahl der Verzögerer - Exponent des Faktors $(z \pm 1)$
 Obwohl die Zahl von Verzögerern größer als der Grad der Übertragungsfunktion im Referenzfilter ist, verändert sich der Grad der Übertragungsfunktion des Wellendigitalfilters im diskreten System nicht.

Im Beispiel 4 (ebenfalls eine nicht kanonische Realisierung!) sind die charakteristischen Wurzeln

$$z = 1.0000000 + j0.0000000$$

$$z = 0.4255455 + j0.5832657$$

$$|z| = 0.9999998$$

$$|z| = 0.7220026$$

$$\begin{array}{ll} z = 0.4255455 + j-0.5832657 & |z| = 0.7220026 \\ z = 0.4255454 + j0.5832655 & |z| = 0.7220024 \\ z = 0.4255454 + j-0.5832655 & |z| = 0.7220024 . \end{array}$$

Darunter haben zwei Paare Wurzeln, die jeweils gleich sind, und es tritt eine Wurzel auf, die gleich +1 ist. Die entsprechende Position in der z-Ebene ist in Bild 3.3 gezeichnet. In diesem Beispiel gibt es drei redundante Verzögerer. Sie haben ebenfalls keinen Einfluß auf die Übertragungsfunktion.

Im allgemeinen ergibt sich keine echten charakteristischen Wurzeln bei der nicht kanonischen digitalen Nachbildung von Analogfiltern. Deshalb müssen die redundanten Verzögerer nicht eliminiert werden. Alle echten Wurzeln befinden sich so innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, was den Beweis für die Stabilität von Wellendigitalfiltern im linearen Fall liefert.

Wenn die Matrix als

$$A_n = (\hat{A} - I) \cdot (\hat{A} + I)^{-1}$$

angenommen wird, folgt die charakteristische Gleichung

$$|\psi \cdot I - A_n| = 0 ,$$

deren Wurzeln alle einen negativen Realteil besitzen.

Das Polynom $|\psi \cdot I - A_n|$ wird auch als Hurwitz-Polynom bezeichnet.

Die Beziehung zwischen den Matrizen $\hat{A}$ und A_n sieht der Beziehung zwischen den komplexen Variablen z und ψ

$$\psi = \frac{z - 1}{z + 1}$$

sehr ähnlich, d.h. die Wellendigitalfilter stehen im engen Zusammenhang mit Analogfiltern.

Weil die Matrix $(\hat{A} + I)$ singular sein kann (*Abzweigfilter*), könnte sich unter Umständen die Arithmetik der direkten Inversion einer Matrix für die Berechnung der Matrix $(\hat{A} + I)^{-1}$ nicht eignen. Deshalb ist eine approximative Arithmetik nützlich, die ähnlich der im 7. Kapitel beschriebenen ist, sofern die Matrix die

Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}^n \rightarrow 0$ erfüllt.

Durch Berechnung ergeben sich die charakteristischen Wurzeln der Gleichung

$$|\psi \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_n| = 0 ,$$

des Beispiels 3 in der Form

$$\begin{aligned}\psi(1) &= -0.7038601 + j \, 0.0000000 \\ \psi(2) &= -0.4466651 + j \, 0.7042022 \\ \psi(3) &= -0.4466651 + j -0.7042022 \\ \psi(4) &= -0.1670394 + j \, 0.9396225 \\ \psi(5) &= -0.1670394 + j -0.9396225 \\ \psi(6) &= -0.05273364 + j \, 0.9970021 \\ \psi(7) &= -0.05273364 + j -0.9970021 \\ \psi(8) &= -0.01175743 + j \, 1.011245 \\ \psi(9) &= -0.01175743 + j \, 1.011245 \\ \psi(10) &= -16379.87 + j \, 0.0000000 \\ \psi(11) &= -16388.12 + j \, 0.0000000 \\ \psi(12) &= -16385.37 + j \, 1.820178 \\ \psi(13) &= -16385.37 + j -1.820178.\end{aligned}$$

In diesem Beispiel tauchen vier redundante Wurzeln $\psi(10)$, $\psi(11)$, $\psi(12)$, $\psi(13)$ auf. Die charakteristischen Wurzeln des Beispiels 4 sind

$$\begin{aligned}\psi(1) &= -0.2017857 + j \, 0.4917138 \\ \psi(2) &= -0.2017857 + j -0.4917138 \\ \psi(3) &= -0.2017857 + j \, 0.4917139 \\ \psi(4) &= -0.2017857 + j -0.4917139 \\ \psi(5) &= 0.9668359E-9 + j \, 0.0000000.\end{aligned}$$

Darunter gibt es drei redundante Wurzeln $\psi(3)$, $\psi(4)$ und $\psi(5)$.

Zusammenfassen läßt sich also sagen:

Unter Verwendung von Leistungswellen kann jede Teilschaltung Passivitätseigenschaft besitzen, sofern sie durch eine orthogonale Transformation beschreibbar ist. Das Verhältnis zwischen Eingangssignalen und Ausgangssignalen ist

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{oder} \quad \|\mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{a}\|_2^2 \quad (112)$$

wobei $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ sind.

Die Zustandsdarstellung für die Zusammenschaltung aus Bausteinen, die als eine orthogonale Transformation darstellbar sind, ist ebenfalls eine orthogonale Transformation. Das wurde in den letzten Abschnitten bereits ausführlich erörtert. Diese Eigenschaft hat zur Folge, daß die numerische Stabilität, die sich ja von der analoger Schaltungen oder von der digitaler Schaltungen mit idealen unendlichen Wortlängen, unterscheidet, bei der Realisierung sichergestellt werden kann. Die Wellendigitalfilter, die Passivität von Analogfiltern richtig nachbilden, besitzen diese numerische Stabilität. Solche digitalen Schaltungen sind sowohl grenzzyklusschwingungsfrei wie auch überlaufarm. Selbstverständlich hängt die stabile digitale Ausführung von der Struktur der Adaptoren ab. Im Nachfolgenden soll diese Abhängigkeit erörtert werden.

3.4 Antwortstabilität, Schleifenstabilität und grenzzyklusschwingungsfreie Stabilität von PWDF

Die Stabilität von Wellendigitalfiltern ist unter linearen Bedingungen in jedem Fall sichergestellt. Unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte wurde die Stabilität von VWDF bereits in [2]-[3], [51]-[54] nachgewiesen. Die Stabilität von PWDF unter nichtlinearen Bedingungen kann man ebenfalls ähnlich wie die Stabilität von VWDF untersuchen, weil der Unterschied zwischen Gl. (109) und

$$P = \sum_{\nu=1}^n (|A_{\nu}|^2 - |B_{\nu}|^2) \cdot G_{\nu} > 0 \quad (113a)$$

$$P(k) = \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu}^2(k) - b_{\nu}^2(k)) \cdot G_{\nu} > 0 \quad (113b)$$

nur in einer Konstante G_{ν} besteht.

Da die aufgenommene Pseudoleistung von PWDF unabhängig von den Torwiderständen ist, taucht der Torwiderstand G_{ν} in Gl. (109) nicht auf. Wird $G_{\nu} = 1$ (ausgehend nur von der mathematischen Form, obwohl in einem Digitalfilter-Netzwerk nicht wie in üblichem Sinne $G_{\nu} \equiv 1$ ist) in Gl. (113) eingesetzt, so stimmt Gl. (113) mit Gl. (109) überein. Aus diesem Grund muß man die Stabilität von PWDF unter nichtlinearen Bedingungen nicht noch einmal gesondert beweisen.

Nun sollten wir die Bedingung (110) unter Verwendung von Leistungswellen berücksichtigen.

Der Ausdruck für n-Tor-Adaptoren unter Verwendung von Leistungswellen ist der in 2. Kapitel angegebene, nämlich

$$b_{\nu} = \pm (\gamma_{\nu} \cdot a_0 - a_{\nu}),$$

$$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n.$$

Damit Passivität auch bei gerundeten Koeffizienten erfüllt ist, muß für diese

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 \leq 2$$

sein.

Betrachten wir jetzt einen 3-Tor-Paralleladaptor mit einem reflexionsfreien Tor, so kann man die Beziehungen

$$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + a_3,$$

$$b_1 = \gamma_1 \cdot a_0 - a_1, \quad (114a)$$

$$b_2 = \gamma_2 \cdot a_0 - a_2, \quad (114b)$$

$$b_3 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 \quad (114c)$$

angeben, die sich nun aber in der Form von den 3-Tor-Paralleladaptoren in Spannungswellen-Darstellung unterscheiden.

Um Bedingung (110) zu erfüllen, schneidet man bei Verwendung von Spannungswellen das Zweier-Komplement innerhalb der Adaptoren ab und fügt Korrekturen durch Zusatzoperationen an den Ausgängen der Adaptoren an [51].

Bei Verwendung von Leistungswellen müssen ebenfalls geeignete Operationen (Maßnahmen) gefunden werden, um die Bedingung (110) zu erfüllen.

Sei x eine beliebige Zahl, x_* die entsprechende Zahl durch Zweier-Komplement-Abschneiden und Q die Quantisierungsstufe, so erhält man

$$x - Q < x_* \leq x. \quad (115a)$$

Aus der Ungleichung (115a) folgt

$$x_* \leq x < x_* + Q. \quad (115b)$$

Angenommen sind $x_{\nu*} = x_{\nu}$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, $0 < c < 1$,

$$Y_0 = x_{1*} + x_{2*} + x_{3*} + \dots + x_{n*},$$

$$= x_{1*} + x_2 + x_3 + \dots + x_n ,$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \text{ unter linearen Bedingungen,}$$

$$Y_q = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \text{ unter nichtlinearen Bedingungen,}$$

Gemäß der Ungleichung (115b) läßt sich schreiben

$$x_{1*} \leq x_1 < x_{1*} + Q .$$

Daraus erhält man direkt

$$Y_0 \leq Y < Y_0 + Q . \quad (115c)$$

Man kann nun den Betrag von Y diskutieren, der in der Form

$$|Y| > |Y_0| , \quad \text{für } (Y_0 \geq 0) \cup (Y_0 = Y)$$

$$|Y| > \begin{cases} |Y_0 + Q| , & \text{für } (Y_0 \leq -Q) \cap (Y_0 \neq Y) \\ 0 , & \text{für } (-Q < Y_0 < 0) \cap (Y_0 \neq Y) \end{cases}$$

dargestellt ist.

Weil $-Q < Y_0 < 0$ nicht möglich ist, kann man

$$|Y| > |Y_0 + Q| \quad \text{für } (Y_0 < 0) \cap (Y_0 \neq Y)$$

schreiben.

Um $|Y_q| \leq |Y|$ zu erfüllen, berücksichtigen wir, daß Y_q durch

$$Y_q = \begin{cases} Y_0 , & \text{für } (Y_0 \geq 0) \cup (Y_0 = Y) \\ Y_0 + Q , & \text{für } (Y_0 < 0) \cap (Y_0 \neq Y) \end{cases} \quad (116a)$$

$$(116b)$$

gegeben sein sollte. Das ist identisch mit der entsprechenden Beziehung in [51], falls

$$Y_q = b_\nu , \quad Y_0 = (b_{\nu 0})_* , \quad Y = b_{\nu 0} \text{ in Gl. (116) eingesetzt wird.}$$

Angenommen sind ferner $x_{\nu*} = x_\nu$, $\nu = 3, 4, \dots, n$, $0 < c < 1$,

$$Y_0 = x_{1*} + x_{2*} + x_{3*} + \dots + x_{(n-1)*} ,$$

$$= x_{1*} + x_{2*} + x_3 + \dots + x_{n-1} ,$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} \text{ unter linearen Bedingungen,}$$

$$Y_q = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} \text{ unter nichtlinearen Bedingungen,}$$

$$b = c \cdot Y - x_n \text{ unter nichtlinearen Bedingungen.}$$

Gemäß der Ungleichung (115b) läßt sich schreiben

$$x_{1*} \leq x_1 < x_{1*} + Q ,$$

$$x_{2*} \leq x_2 < x_{2*} + Q ,$$

und damit

$$x_{1*} + x_{2*} \leq x_1 + x_2 < x_{1*} + x_{2*} + 2Q .$$

Daraus erhält man direkt

$$Y_0 \leq Y < Y_0 + 2Q . \quad (117)$$

Man kann nun den Betrag von Y in der Ungleichung (117) diskutieren, der in der Form

$$|Y| \geq |Y_0| , \quad \text{für } (Y_0 \geq 0) \cup (Y_0 = Y) \quad (118a)$$

$$|Y| > \begin{cases} |Y_0 + 2Q| , & \text{für } (Y_0 \leq -2Q) \cap (Y_0 \neq Y) \\ 0 , & \text{für } (-2Q < Y_0 < 0) \cap (Y_0 \neq Y) \end{cases} \quad (118b)$$

$$(118c)$$

dargestellt ist.

Um $|Y_q| \leq |Y|$ zu erfüllen, berücksichtigen wir, daß Y_q durch

$$Y_q = \begin{cases} Y_0 , & \text{für } (Y_0 \geq 0) \cup (Y_0 = Y) \\ Y_0 + 2Q , & \text{für } (Y_0 \leq -2Q) \cap (Y_0 \neq Y) \\ 0 , & \text{für } (-2Q < Y_0 < 0) \cap (Y_0 \neq Y) \end{cases} \quad (119a)$$

$$(119b)$$

$$(119c)$$

gegeben sein sollte. Hierbei kann der Fall $(-2Q < Y_0 < 0)$ nur auftreten für $Y_0 = -Q$.

Aus Ungleichung (117) folgt für $c > 0$

$$c \cdot Y_0 \leq c \cdot Y < c \cdot Y_0 + 2cQ . \quad (120)$$

Durch Einsetzen von $x = c \cdot Y_0$ in die Ungleichung (115b) wird also

$$(c \cdot Y_0)_* \leq c \cdot Y_0 < (c \cdot Y_0)_* + Q. \quad (121)$$

Weiterhin ergibt sich

$$(c \cdot Y_0)_* \leq c \cdot Y < (c \cdot Y_0)_* + Q + 2cQ < \begin{cases} (c \cdot Y_0)_* + 2Q, & \text{für } 0 < c < 0.5 \\ (c \cdot Y_0)_* + 3Q, & \text{für } 0.5 \leq c < 1. \end{cases}$$

$$\text{Es gilt dabei } (c \cdot Y_0)_* \leq c \cdot Y < \begin{cases} (c \cdot Y_0)_* + 2Q, & \text{für } 0 < c < 0.5 \\ (c \cdot Y_0)_* + 3Q, & \text{für } 0.5 \leq c < 1. \end{cases} \quad (122)$$

Weiterhin gilt

$$(c \cdot Y_0)_* - x_n \leq c \cdot Y - x_n < \begin{cases} (c \cdot Y_0)_* - x_n + 2Q, & \text{für } 0 < c < 0.5 \\ (c \cdot Y_0)_* - x_n + 3Q, & \text{für } 0.5 \leq c < 1. \end{cases} \quad (123)$$

Den Zusammenhang für die Beträgen von $c \cdot Y - x_n$ unter linearen Bedingungen und von $(c \cdot Y_0)_* - x_n$ unter nichtlinearen Bedingungen stellen wir weiterhin durch die Ungleichung (123) dar, also detailliert durch

$$|c \cdot Y - x_n| \geq |(c \cdot Y_0)_* - x_n|$$

$$\text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n \geq 0] \cup [(c \cdot Y_0)_* = c \cdot Y] \quad (124a)$$

$$|c \cdot Y - x_n| > \begin{cases} |(c \cdot Y_0)_* - x_n + 2Q|, & (0 < c < 0.5) \\ \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n \leq -2Q] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y] & (124b) \\ |(c \cdot Y_0)_* - x_n + 3Q|, & (0.5 \leq c < 1) \\ \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n \leq -3Q] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y]. & (124c) \end{cases}$$

Gemäß (110) muß $|b| \leq |c \cdot Y - x_n|$ sein. So erhalten wir schließlich

$$b = \begin{cases} (c \cdot Y_0)_* - x_n, & \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n \geq 0] \cup [(c \cdot Y_0)_* = c \cdot Y] \\ (c \cdot Y_0)_* - x_n + 2Q, & (0 < c < 0.5) \\ & \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n < -2Q] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y] \\ 0 & \text{für } [-2Q < (c \cdot Y_0)_* - x_n < 0] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y] \end{cases}$$

(125)

oder

$$b = \begin{cases} (c \cdot Y_0)_* - x_n, & \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n \geq 0] \cup [(c \cdot Y_0)_* = c \cdot Y] \\ (c \cdot Y_0)_* - x_n + 3Q, & (0.5 \leq c < 1) \\ & \text{für } [(c \cdot Y_0)_* - x_n < -3Q] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y] \\ 0 & \text{für } [-3Q < (c \cdot Y_0)_* - x_n < 0] \cap [(c \cdot Y_0)_* \neq c \cdot Y] . \end{cases}$$

(126)

Die Festkommazahl in Zweier-Komplement-Darstellung ist betragsmäßig eingeschränkt, normalerweise ist sie nicht größer als Eins. Daher können neben den Rundungsfehlern auch Überlauffehler auftreten. Die Überlaufkorrektur ist besonders wichtig für den Fall, daß die Störung entweder am Eingang oder innerhalb der Struktur des Digitalfilters auftritt und dabei den Betrag des maximal zulässigen Signalwerts (normalerweise: 1) überschreitet. Wenn das Auftreten von Überläufen des Digitalfilters im Bereich zulässiger Eingangssignal-Pegel selten ist, wird das Rauschen am Ausgang stärker reduziert, da ja das durch Überläufe verursachte Rauschen (durch die Überlaufkorrektur) viel größer als das durch die Quantisierungsoperation nach der Multiplikation verursachte Rauschen ist. In gewissem Sinne ist die Häufigkeit der inneren Überläufe eine Maßgröße für die innere numerische Stabilität. Bei PWDF ist also der zulässige Eingangssignal-Pegel groß. Wenn die größte oder kleinste darstellbare Zahl bei Überlauf in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Festkommaziffer eingesetzt wird, resultiert die in Bild 3.4 gezeigte Sättigungskennlinie.

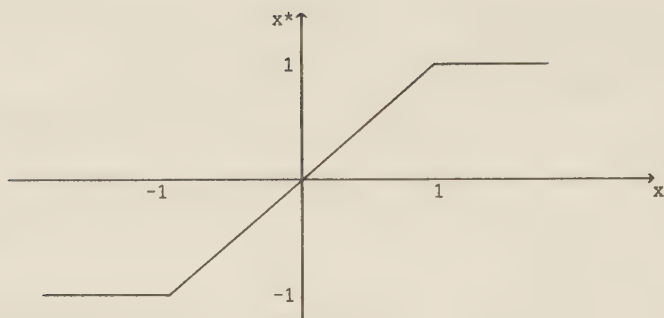


Bild 3.4 Festkomma-Überlauf-Charakteristik

Man erkennt aus Bild 3.4, daß

$$x^* = \begin{cases} -1, & \text{für } x < -1 \\ x, & \text{für } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad (127)$$

gilt, wobei x^* eine durch die Sättigungscharakteristik bestimmte Größe ist.

Auf ähnliche Weise kann man die Korrektur für einen 3-Tor-Paralleladaptor ohne reflexionsfreies Tor und selbstverständlich auch die Korrekturbeziehungen für n -Tor-Paralleladaptoren erhalten, wenn man von (116) ausgeht.

Das Ausgangssignal des n -Tor-Serienadaptors kann durch das Signal des einem n -Tor-Paralleladaptor entgegengesetzten Typs dargestellt werden, wie in 2. Kapitel gezeigt wurde, also durch

$$b_{\nu}' = -b_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (128)$$

wobei b_{ν}' das ν -te Ausgangssignal des n -Tor-Serienadaptors, b_{ν} das ν -te Ausgangssignal des n -Tor-Paralleladaptors entgegengesetzten Typs ist.

Aus Gl. (128) folgt

$$|b_{\nu}'| = |-b_{\nu}| = |b_{\nu}| \leq |c \cdot Y - a_{\nu}| = |-(c \cdot Y - a_{\nu})|,$$

also

$$|b_{\nu}'| \leq |-(c \cdot Y - a_{\nu})|, \quad (129)$$

wobei b_ν , b_ν' die ν -ten Ausgangssignale der Adaptoren unter nichtlinearen Bedingungen sowie $c \cdot Y - a_\nu$, $-(c \cdot Y - a_\nu)$ die entsprechenden Ausgangssignale unter linearen Bedingungen sind.

Bei der digitalen Durchführung oder Rechnersimulation liefern die gefundenen Ergebnisse nicht unbedingt auch notwendige Bedingungen bei der Korrektur. Das bedeutet, daß manchmal nur ein einziges Korrektur-Bit an den Ausgängen der Adaptoren schon ausreichend ist, um Grenzzyklusschwingungen zu vermeiden.

Deshalb besteht ein enger Zusammenhang zwischen Struktur und Grenzzyklusschwingungen. Durch theoretische Untersuchungen kann man sich über die Ursache von Grenzzyklusschwingungen Klarheit verschaffen, wobei mit einer geeigneten Struktur und entsprechenden Maßnahmen parasitäre Feinschwingungen vermieden werden können. Parasitäre Grobschwingungen können verhindert werden, wenn man eine geeignete Überlaufkorrektur (z.B. *Sättigungskennlinie*) verwendet [51]-[54].

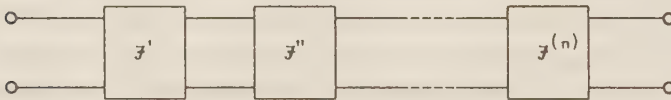
Wellendigitalfilter mit Leistungswellen haben somit besonders attraktive Eigenschaften gerade in Bezug auf Antwortstabilität, Schleifenstabilität und grenzzyklusschwingungsfreie Stabilität. Im eigentlichen Sinne gehören diese Eigenschaften zur numerischen Stabilität. Außerdem bringt die numerische Stabilität auch noch Eigenschaften der Überlaufstabilität bei der Realisierung mit sich, die bei PWDF hervorragend sind [70]. Selbstverständlich sind zweidimensionale Wellendigitalfilter mit Leistungswellen ebenfalls überlaufstabil [72].

4. Reziprozität und Dualität von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung

Die Reziprozität und die Transposition von Wellendigitalfiltern in Spannungswellen-Darstellung sind in [73] untersucht worden. Hierbei werden die Reziprozität und Dualität von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung diskutiert. Darüber hinaus werden auch andere Äquivalenzbeziehungen (z.B. Kuroda-Identitäten) unter Verwendung von Leistungswellen behandelt.

4.1 Reziprozitätseigenschaft von PWDF

Ausgehend davon, daß Wellendigitalfilter aus kaskadengeschalteten Zweitoren bestehen, können sie stets in der folgenden Form gezeichnet werden:



$$J = J' \cdot J'' \cdot \dots \cdot J^{(n)}$$

Wir nehmen an, daß die Streumatrix des ersten Zweitores

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix}$$

ist, daß die Streumatrix des zweiten Zweitores

$$S'' = \begin{bmatrix} S''_{11} & S''_{12} \\ S''_{21} & S''_{22} \end{bmatrix}$$

ist, wobei $S'_{21}(z) = S'_{12}(z)$, $S''_{21}(z) = S''_{12}(z)$ sind (s. Tabellen im 2. Kapitel).

Durch die Multiplikation der ersten und zweiten Betriebsmatrix, die der ersten

und zweiten Streumatrix entspricht, erhält man die gesamte Streumatrix von zwei Zweitoren

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-S''_{11} \cdot \Delta' + S'_{11}}{1 - S''_{11} \cdot S'_{22}} & \frac{S'_{12} \cdot S''_{12}}{1 - S''_{11} \cdot S'_{22}} \\ \frac{S'_{21} \cdot S''_{21}}{1 - S''_{11} \cdot S'_{22}} & \frac{-S'_{22} \cdot \Delta'' + S''_{22}}{1 - S''_{11} \cdot S'_{22}} \end{bmatrix} \quad (130)$$

wobei $\Delta' = \det S'$, $\Delta'' = \det S''$ sind.

Wegen $S'_{21} = S'_{12}$, $S''_{21} = S''_{12}$ ist die gesamte Streumatrix symmetrisch, d.h. das Zweitor, das aus zwei Zweitoren besteht, ist reziprok.

Auf diese Weise kann die Reziprozität von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung durch mathematische Induktion bewiesen werden. Die Mehrtore, die für sich nicht als Zweitore darstellbar sind, werden mit anderen Zweitoren oder Mehrtoren zusammengefaßt, so daß ein Zweitor entsteht. Ein Beispiel ist etwa das **Beispiel 4** in **Bild 2.17**. Die Matrix-Beschreibung für jeden Adaptor und anderen Bestandteil (*Transformator, Leitungselement usw.*) ist eine orthogonale Darstellung und ganz symmetrisch. Besteht ein Wellendigitalfilter aus solchen Bestandteilen, wird das hieraus zusammengeschaltete Wellendigitalfilter in Leistungswellen-Darstellung, als Zweitor reziprok oder Übertragungssymmetrisch. Deshalb ist das Zweitor des Beispiels, das aus fünf Mehrtoren besteht, reziprok.

4.2 Interpretation der Dualitätsbeziehung unter Verwendung von Leistungswellen

Um die Dualität von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung zu interpretieren, betrachten wir zuerst ein Beispiel.

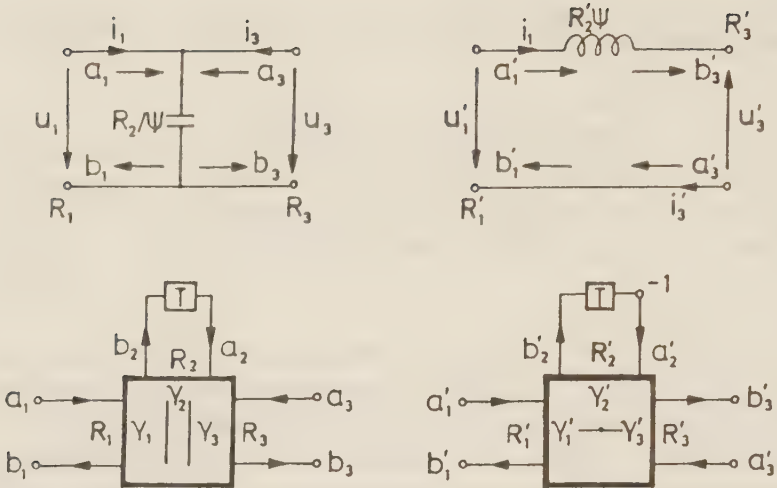


Bild 4.1 Duale Elementarzellen im Referenzfilter und im Wellenflußdiagramm

In Bild 4.1 sind die dualen Elementarzellen als Referenzfilter gezeichnet und zugehörigen Wellenflußdiagramme.

Die Streumatrix ist jeweils

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma_1^2 - 1) \cdot z - (\gamma_3^2 - 1)}{z + \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 1} & \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot (z + 1)}{z + \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 1} \\ \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot (z + 1)}{z + \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 1} & \frac{(\gamma_3^2 - 1) \cdot z - (\gamma_1^2 - 1)}{z + \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 1} \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$H'(z) = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \gamma_1'^2) \cdot z - (1 - \gamma_3'^2)}{z + \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 - 1} & \frac{-\gamma_1' \cdot \gamma_3' \cdot (z + 1)}{z + \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 - 1} \\ \frac{-\gamma_1' \cdot \gamma_3' \cdot (z + 1)}{z + \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 - 1} & \frac{(1 - \gamma_3'^2) \cdot z - (1 - \gamma_1'^2)}{z + \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 - 1} \end{bmatrix} \quad (132)$$

Aus (131), (132) folgt

$$\mathbf{H}(z) = -\mathbf{H}'(z), \quad (133)$$

wenn $\gamma_1 = \gamma_1'$, $\gamma_3 = \gamma_3'$ sind.

Selbstverständlich ist $\gamma_2 = \gamma_2'$, weil $\gamma_2^2 = 2 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2$, $\gamma_2'^2 = 2 - \gamma_1'^2 - \gamma_3'^2$ sind. Dann gilt

$$\gamma_1^2 = \gamma_1'^2, \gamma_2^2 = \gamma_2'^2, \gamma_3^2 = \gamma_3'^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\gamma_1^2 : \gamma_2^2 : \gamma_3^2 = \gamma_1'^2 : \gamma_2'^2 : \gamma_3'^2. \quad (134)$$

Aus (134) wird

$$1/R_1 : 1/R_2 : 1/R_3 = R_1' : R_2' : R_3'. \quad (135)$$

Für Gleichung (135) stehen mehrere Lösungen zur Verfügung. Wir können eine Lösung annehmen, z.B. $1/R_1 = R_1'$.

So sind $1/R_2 = R_2'$, $1/R_3 = R_3'$. (136)

Aus (131), (132), (133), (136) erhält man die Äquivalenzbeziehung im folgenden Bild 4.2.

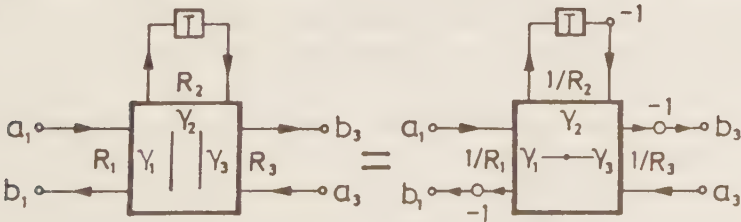


Bild 4.2 Äquivalenzbeziehung im Wellenflußgramm

Diese Äquivalenzbeziehung im Wellenflußdiagramm beschreibt die Dualität im Referenzfilter. Unter Verwendung der Substitutionen der dualen Größen im Referenzfilter ist die Beziehung leicht zu verstehen. Die Substitutionen der dualen Größen sind im folgenden [48]:

$$i \longleftrightarrow u$$

$$R \longleftrightarrow G$$

$$\begin{aligned} * & \longleftrightarrow Q \\ L & \longleftrightarrow C \\ W_L & \longleftrightarrow W_C \\ e(t) & \longleftrightarrow j(t) \end{aligned}$$

In (2a), (2b) werden die Größen u , R , i durch i , G , u nach (137) ersetzt.

So ergibt sich

$$a' = \frac{i + G \cdot u}{2\sqrt{G}} = \frac{R \cdot i + u}{2\sqrt{G} \cdot R} = \frac{u + R \cdot i}{2\sqrt{R}} = a \quad (138)$$

$$b' = \frac{i - G \cdot u}{2\sqrt{G}} = \frac{R \cdot i - u}{2\sqrt{G} \cdot R} = \frac{-u + R \cdot i}{2\sqrt{R}} = -b, \quad (139)$$

wobei a' , b' die Wellengrößen nach den Substitutionen und a , b die Wellengrößen vor den Substitutionen sind.

Aufgrund der Gleichungen (138), (139) kann ein n -Tor-Adaptor in seinen dualen Adaptor umgewandelt werden, während Adaptern zu Adaptern entgegengesetzten Typs mit invertierten Ausgängen werden. Ausgehend von der Beziehung (136) werden die Torwiderstände jeweils durch $1/R_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ersetzt, d.h. es gelten die Zusammenhänge von Bild 4.3.

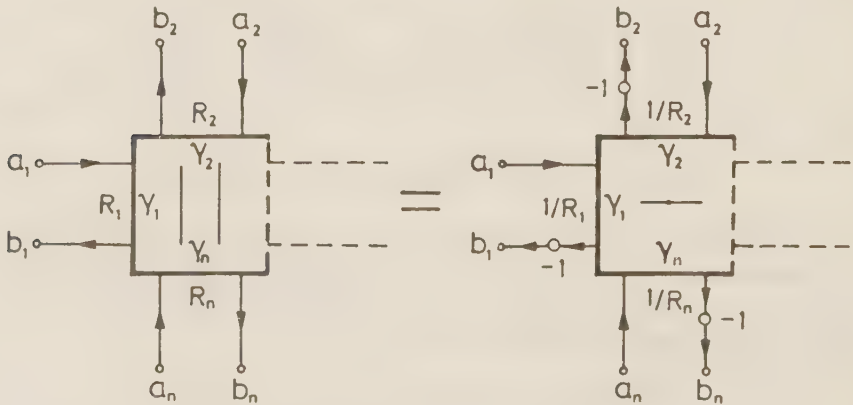


Bild 4.3 Beziehung zwischen zwei Typen der n -Tor-Adaptern

Der Unterschied zwischen n-Tor-Paralleladaptoren und n-Tor-Serienadaptoren besteht nur im Vorzeichen bei Berücksichtigung der Wellengrößenwerte und besteht in den Torwiderständen bei Berücksichtigung der Anpassungsbedingung.

Die Dualität von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen - Darstellung ist folgendermaßen beschreibbar:

Alle Adaptoren in einem Wellendigitalfilter werden durch ihre entgegengesetzten Adaptoren mit invertierten Ausgängen ersetzt, also

Paralleladaptor mit a_i, b_i $\longleftrightarrow$ Serienadaptor mit $a_i, -b_i$

Alle Torwiderstände werden durch ihre inversen Werte G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ersetzt, also

$$R_i \longleftrightarrow G_i$$

Folgende Dualitätsbeziehungen gelten für die Elementarzellen im Wellenflußdiagramm:

Kapazität : $B = z^{-1} \cdot A$

Induktivität : $B = -z^{-1} \cdot A$

Kurzschluß : $B = -A$

Leerlauf : $B = A$

Ideale Spannungsquelle :

Ideale Stromquelle :

$$B = E/\sqrt{R} - A$$

$$B = A - \sqrt{R} \cdot J \quad (J = E/R)$$

Paralleladaptor :

Serienadaptor :

$$B = (\gamma \cdot \gamma^T - I) \cdot A$$

$$B = -(\gamma \cdot \gamma^T - I) \cdot A$$

Parallelresonanzschaltung :

Serienresonanzschaltung :

$$\rho(z) = \frac{(\gamma_3^2 - 1)z^2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)z - 1}{z^2 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)z - (\gamma_3^2 - 1)}$$

$$\rho(z) = - \frac{(\gamma_3^2 - 1)z^2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)z - 1}{z^2 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)z - (\gamma_3^2 - 1)}$$

Widerstand : $B = 0$

Leitwert : $B = 0$

Für alle dualen Elementarzellen im Referenzfilter ist die entsprechende

Streumatrix im Wellenflußdiagramm

$$H(z) = - H'(z) .$$

Es sei betont, daß beim Umwandeln der Zusammenschaltung von Wellendigitalfiltern außer den invertierten reflektierten Wellen auch die Torwiderstandsanpassungen berücksichtigt werden müssen.

Zur Verdeutlichung sei folgendes Beispiel unter Verwendung der Dualitätsbeziehung von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung behandelt:

In Bild 4.4 ist ein Referenzfilter mit seinen Bauelementen gezeigt. Das zugehörige Wellendigitalfilter mit Adaptorparametern und Torwiderständen ist in Bild 4.5 angegeben. Nach dem Umwandeln unter Verwendung der Dualitätsbeziehung von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung wird ein entgegengesetzter Typ entsprechend Bild 4.6 ermittelt. Weil das Auftreten eines Vorzeichens nach einem Verzögerer die Wellenübertragung nicht verändert, tritt normalerweise hinter dem Verzögerer ein Minus-Vorzeichen auf. Weil die Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen des Adaptors in der Mitte der Schaltung von Bild 4.6 alle mit einem Minuszeichen multipliziert sind, kann man die Schaltung vereinfachen wie es in Bild 4.7 gezeigt ist. Hierbei ist die Torwiderstandsbedingung erfüllt und man braucht dies dann bei der Realisierung nicht mehr zu berücksichtigen. Das Minuszeichen am Eingang und Ausgang des Wellendigitalfilters in Bild 4.7 bedeutet, daß das Quellen-Eintor und das Last-Eintor in ihren entgegengesetzten Typ umgewandelt werden. In Bild 4.8 ist ein zugehöriges Referenzfilter mit seinen Bauelementwerten angegeben. Dieses Referenzfilter in Bild 4.8 steht im gewünschten Zusammenhang mit dem Referenzfilter in Bild 4.4. Sie sind zueinander dual.

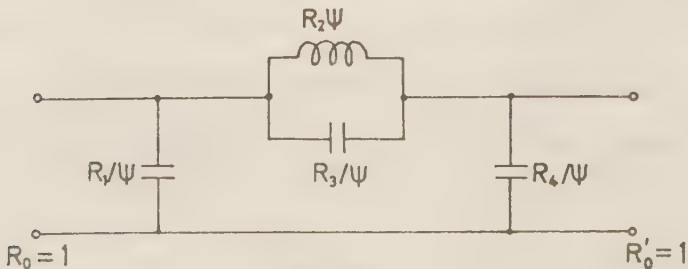


Bild 4.4 Ein Referenzfilter

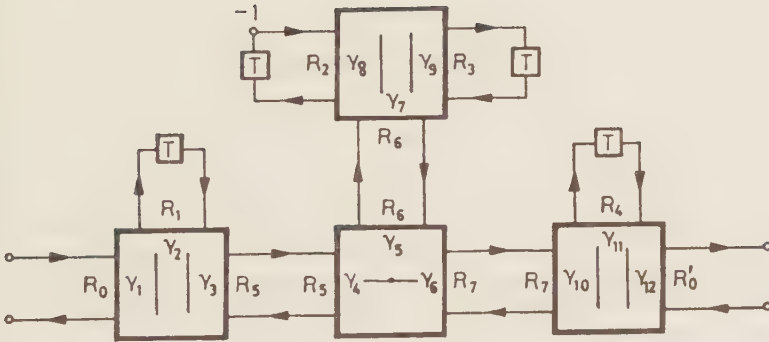


Bild 4.5 Ein dem Filter von Bild 4.4 entsprechendes Wellendigitalfilter

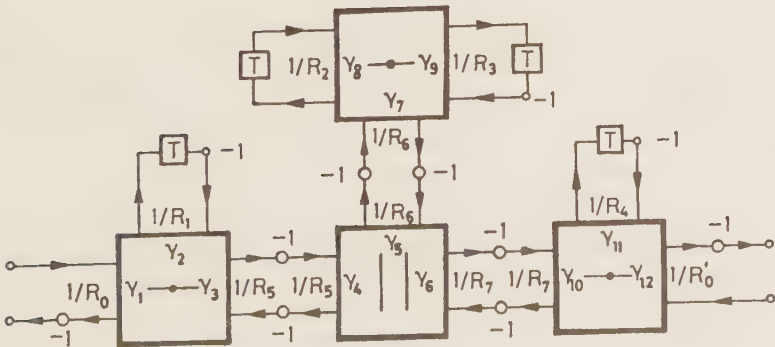


Bild 4.6 Ein äquivalentes Wellenflußdiagramm zu Bild 4.5 (jeder Adaptor in seinen entsprechenden Typ umgewandelt)

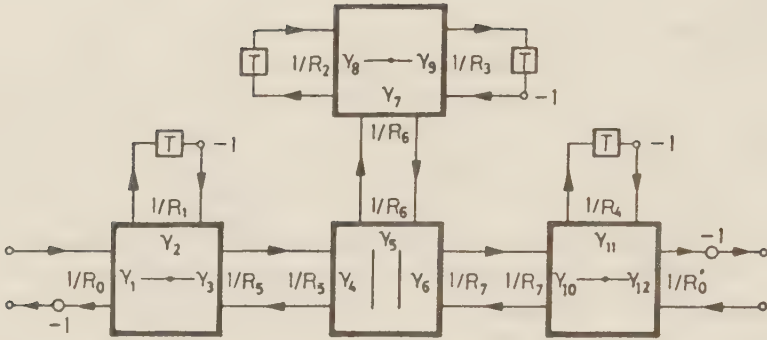


Bild 4.7 Ein Wellendigitalfilter nach dem Umwandeln (entsprechend Bild 4.6)

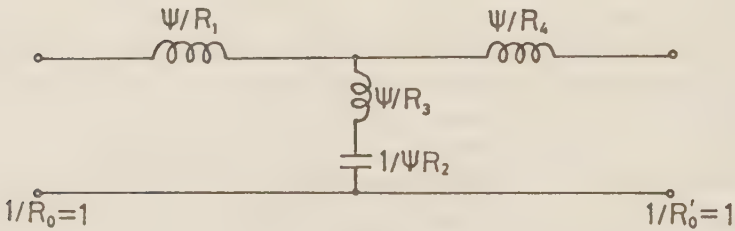


Bild 4.8 Ein zu Bild 4.7 gehörendes Referenzfilter

4.3 Interpretation der Kuroda-Identitäten unter Verwendung von Leistungswellen

Ausgehend von (135) stehen verschiedene Lösungen für Referenzfilter zur Verfügung. Unter anderem ergeben sich Äquivalenzbeziehungen über die Kuroda-Identitäten.

Unter Verwendung von Leistungswellen wird das Digitalfilter (wie oben diskutiert, übergehend von den Einzelteilen bis hin zum ganzen System) übertragungssymmetrisch. Betrachten wir die Streumatrix in (131) und in

(132), so gilt deshalb

$$H_{21} = H_{12} , H'_{21} = H'_{12} .$$

Unter Berücksichtigung der Übertragungsfunktion folgt aus (131) und (132)

$$H_{21} = -H'_{21} \text{ oder } H_{12} = -H'_{12}$$

an der Stelle von $H(z) = -H'(z)$.

Wenn $\gamma_1 = \gamma'_1$, $\gamma_3 = \gamma'_3$ oder $\gamma_1 = \gamma'_3$, $\gamma_3 = \gamma'_1$ sind, dann wird der andere Koeffizient γ_2 ebenfalls gleich γ'_2 , d.h. $\gamma_2 = \gamma'_2$.

Aus der ersten Lösung folgt die Bedingung für Dualität, wie oben schon ausgeführt wurde.

Wenn wir die zweite Lösung ($\gamma_1 = \gamma'_3$, $\gamma_3 = \gamma'_1$) annehmen, ergibt sich daraus

$$\gamma_1^2 : \gamma_2^2 : \gamma_3^2 = \gamma_3'^2 : \gamma_2'^2 : \gamma_1'^2 \quad (140)$$

Aus (140) wird

$$1/R_1 : 1/R_2 : 1/R_3 = R'_3 : R'_2 : R'_1 \quad (141)$$

Gleichung (141) gibt die Bedingungen für die Kuroda-Identitäten A und D in Bild 4.9.

	original	äquivalent	$\Phi=1+k$
A			$1 + Z_o C$
B			$1 + \frac{Z_o}{L}$
C			$1 + \frac{1}{Z_o C}$
D			$1 + \frac{L}{Z_o}$

Bild 4.9 Kuroda- Identitäten

Die originale Schaltung in Bild 4.9 A lässt sich auch im Wellenflußdiagramm zeichnen:

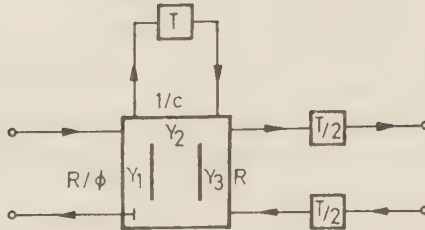


Bild 4.10 a Zu Bild 4.9 A (original) gehöriges Wellenflußdiagramm

In Bild 4.10 a ist die entsprechende digitale Schaltung im Wellenflußdiagramm angegeben. Die Koeffizienten und Torwiderstände dieses Adaptors wurden ebenfalls eingetragen. Das Verhältnis der Torwiderstände ist

$$1/R_1 : 1/R_2 : 1/R_3 = \phi/R : C : 1/R , \quad (142)$$

wobei $\phi = 1 + RC$ ist.

Durch Umformulierung wird

$$\begin{aligned} \phi/R : C : 1/R &= R : \frac{R^2 C}{\phi} : R/\phi \\ &= R : \frac{\phi - 1}{\phi} R : R/\phi . \end{aligned} \quad (143)$$

Wir nehmen an, daß $R'_3 = R$, $R'_2 = \frac{\phi - 1}{\phi} R$, $R'_1 = R/\phi$ sind. Damit ist in (143) die Bedingung (141) erfüllt. Dann folgt daraus

$$\gamma_1^2 : \gamma_2^2 : \gamma_3^2 = \gamma_3'^2 : \gamma_2'^2 : \gamma_1'^2 .$$

Anschließend kann die Schaltung in Bild 4.10 a in die von Bild 4.10 b umgewandelt werden. Die Beziehung zwischen Torwiderständen ist

$$R'_3 = R'_1 + R'_2 ,$$

weil in (142) $1/R_1 = 1/R_2 + 1/R_3$ gilt.

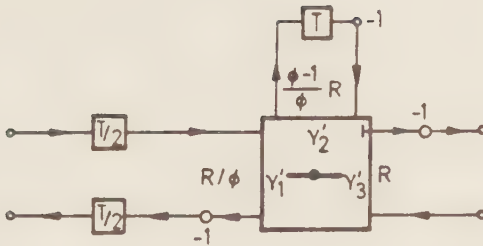


Bild 4.10 b Äquivalente Schaltung zur Schaltung von Bild 4.10 a

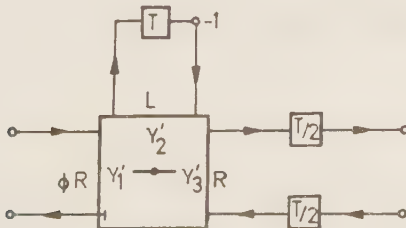
Die Schaltung von Bild 4.10 b ist das zu Bild 4.9 A (äquivalent) gehörige Wellenflußdiagramm mit zwei Invertiern jeweils am Ausgang des Zweitorts, die keinen Einfluß auf den Betrag der Übertragungsfunktion ausüben.

Auf ähnliche Weise kann man die Äquivalenzbeziehung im Wellenflußdiagramm bezüglich der Kuroda-Identität in Bild 4.9 D aufzeigen, indem man das Verhältnis der Torwiderstände gemäß (141)

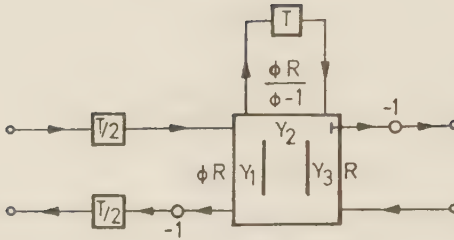
$$\phi R : L : R = \frac{1}{R} : \frac{L}{\phi R^2} : \frac{1}{\phi R} = \frac{1}{R} : \frac{\phi - 1}{\phi R} : \frac{1}{\phi R} \quad (144)$$

umformuliert, wobei $\phi = 1 + \frac{L}{R}$ ist.

Die entsprechenden Schaltungen sind in Bild 4.11 angegeben.



(a)



(b)

Bild 4.11 Ein zu Bild 4.9 D gehöriges Wellenflußdiagramm

Im Bild 4.11 a sind $R'_3 = R$, $R'_2 = L$, $R'_1 = R'_2 + R'_3 = R(1 + L/R) = \phi R$, wobei, wie oben erwähnt $\phi = 1 + L/R$ ist. In Gleichung (144) nehmen wir an, daß $R_1 = \phi R$, $R_2 = \phi R/(\phi - 1)$ und $R_3 = R$ sind. Da $R'_1 = R'_2 + R'_3$ wird, ist die Beziehung $1/R_3 = 1/R_1 + 1/R_2$ ebenfalls erfüllt.

Wenn der Adaptor vor und nach dem Umwandeln zum gleichen Typ gehört, folgt aus (131) oder (132) unter Berücksichtigung der Übertragungsfunktion

$$H_{21}^{(1)} = H_{21}^{(2)}, \quad H_{12}^{(1)} = H_{12}^{(2)}, \quad (145)$$

wobei $H_{ij}^{(1)}$ ($i \neq j$) die Übertragungsfunktion vor dem Umwandeln, $H_{ij}^{(2)}$ diejenige nach dem Umwandeln ist.

Aus (145), (131) oder (132) ergeben sich mehrere Lösungen, worunter man auch einige einfache Lösungen finden kann, etwa

$$\gamma_1^{(1)} = \gamma_3^{(2)}, \quad \gamma_3^{(1)} = \gamma_1^{(2)}. \quad (146)$$

Die Lösung

$$\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_3^{(1)} = \gamma_3^{(2)}$$

wäre aber trivial.

Aus (146) wird der weitere Koeffizient $\gamma_2^{(1)}$ auch gleich $\gamma_2^{(2)}$ gewählt:

$$\gamma_2^{(1)} = \gamma_2^{(2)}. \quad (147)$$

Dann erhält man aus (146), (147)

$$1/R_1^{(1)} : 1/R_2^{(1)} : 1/R_3^{(1)} = 1/R_3^{(2)} : 1/R_2^{(2)} : 1/R_1^{(2)} \quad (148a)$$

oder $R_1^{(1)} : R_2^{(1)} : R_3^{(1)} = R_3^{(2)} : R_2^{(2)} : R_1^{(2)} . \quad (148b)$

Die Gleichungen (148a), (148b) stellen die Bedingungen für Kuroda-Identität in Bild 4.9 B und C dar.

Die originale Schaltung im Bild 4.9 B läßt sich dann im Wellenflußdiagramm wie folgt darstellen:

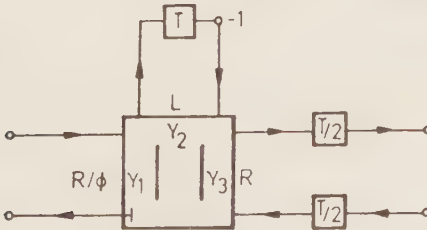


Bild 4.12 a zu Bild 4.9 B (original) gehöriges Wellenflußdiagramme

Das Verhältnis zwischen den Torwiderständen in Bild 4.12 a ist

$$\frac{1}{R_1^{(1)}} : \frac{1}{R_2^{(1)}} : \frac{1}{R_3^{(1)}} = \frac{\phi}{R} : \frac{1}{L} : \frac{1}{R} \quad (149)$$

wobei $\phi = 1 + \frac{R}{L}$ ist.

Die Gleichung (149) wird folgendermaßen umformuliert:

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{R} : \frac{1}{L} : \frac{1}{R} &= \frac{\phi^2}{R} : \frac{\phi}{L} : \frac{\phi}{R} \\ &= \frac{\phi^2}{R} : \frac{\phi(\phi - 1)}{R} : \frac{\phi}{R} . \end{aligned} \quad (150)$$

Wenn $R_1^{(2)} = \frac{R}{\phi}$, $R_2^{(2)} = \frac{R}{\phi(\phi - 1)}$ und $R_3^{(2)} = \frac{R}{\phi^2}$ sind, ist die

Bedingung (148a) erfüllt. Damit die Torwiderstände für das Zweitor vor und nach dem Umwandeln gleich sind, mußte ein Transformator (1 : ϕ) eingesetzt

werden. So kann man das Zweitor von Bild 4.12 a in das von Bild 4.12 b umwandeln.

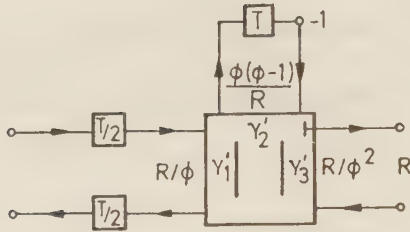


Bild 4.12 b Ein äquivalentes Zweitor des Zweitors von Bild 4.12 a

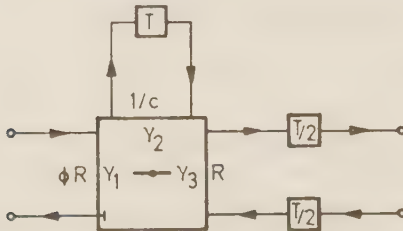
Das Zweitor von Bild 4.12 b zeigt das zu Bild 4.9 D (äquivalent) gehörige Wellenflußdiagramm.

Auf ähnliche Weise kann man die Äquivalenzbeziehung im Wellenflußdiagramm über die Kuroda-Identität von Bild 4.9 C verdeutlichen, indem das Verhältnis der Torwiderstände nach Gleichung (148b) umformuliert wird,

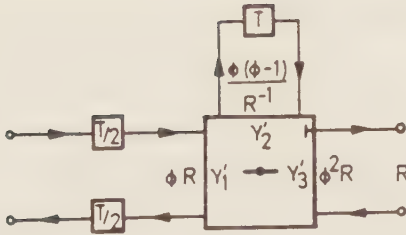
$$\star R : 1/C : R = \star^2 R : \star/C : \star R = \star^2 R : \frac{\star(\star - 1)}{R^{-1}} : \star R, \quad (151)$$

wobei $\star = 1 + \frac{1}{RC}$ ist.

Die entsprechenden Zweitore im Wellenflußdiagramm sind in Bild 4.13 gezeichnet.



(a)



(b)

Bild 4.13 zu Bild 4.9 C gehörige Wellenflußdiagramme

Im Bild 4.13 a gilt

$$R_3(1) = R ,$$

$$R_2(1) = 1/C ,$$

$$R_1(1) = R_2(1) + R_3(1) = R(1 + \frac{1}{RC}) = \phi R ,$$

wobei $\phi = 1 + \frac{1}{RC}$ ist. In Gleichung (151) nehmen wir an, daß

$$R_1(2) = \phi R$$

$$R_2(2) = \frac{\phi(\phi - 1)}{R^{-1}}$$

$$R_3(2) = \phi^2 R$$

sind. Da $R_1(1) = R_2(1) + R_3(1)$ ist, ist die Beziehung

$$R_3(2) = R_1(2) + R_2(2) \text{ dann ebenfalls erfüllt.}$$

Wegen der Torwiderstandsanpassung braucht das äquivalente Zweitor noch den Einsatz eines Transformators ($\phi : 1$).

Hierbei ist zu betonen, daß bei der äquivalenten Transformation im Wellenflußdiagramm sowohl die Übertragungsfunktion als auch die Torwiderstandsanpassung berücksichtigt werden müssen.

Die Wellendigitalfilter in Leistungswellen-Darstellung versetzen uns somit in die Lage, die verschiedenen Äquivalenzbeziehungen im Referenzfilter zu simulieren und die entsprechenden verschiedenen orthogonalen Digitalfilter zu entwerfen [74].

5. Untersuchung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen

Das Verhalten der Empfindlichkeit von Digitalfiltern gegenüber Änderungen der Multiplizierer-Koeffizienten ist bekanntlich sowohl ein wichtiger Einflußfaktor in Bezug auf die diskreten Optimierung, als auch eine einflußreiche Kenngröße für die wesentlichen Eigenschaften von Digitalfiltern. Darüber wurde in vielen Veröffentlichungen diskutiert [2], [4], [5], [36], [75]–[82]. Die Untersuchungen der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen werden darüber hinaus, wie gezeigt werden soll, einen Beweis für die Passivität sowie eine effektive Methode für die diskrete Optimierung und eine Beschreibung für die wesentlichen Eigenschaften von Digitalfiltern abzuleiten gestatten. Bei dieser Untersuchung spielt eine genaue und zur rechnergestützten Bearbeitung geeignete Berechnung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen eine wichtige Rolle. In der vorliegenden Arbeit wird eine Berechnungsmethode für die Empfindlichkeit der Multiplizierer-Koeffizienten vorgestellt, die auf der angegebenen Struktur-Matrix von Digitalfiltern im 2. Kapitel basiert. Auf dieser Basis werden für Wellendigitalfilter die Untersuchungen des Zusammenhangs zwischen Dämpfung und Empfindlichkeit sowie der Abhängigkeit der Empfindlichkeit von Änderungen der Multiplizierer-Koeffizienten durchgeführt. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen Empfindlichkeitsverlauf und Eigenschaften von Digitalfiltern untersucht.

5.1 Ermittlung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen

Im 2. Kapitel wurden die Aufstellung einer Struktur-Matrix und die Berechnung der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich für ein Digitalfilter-Netzwerk vorgestellt. Die Übertragungsfunktion in Matrix-Darstellung ist wegen (33)

$$H(z) = \hat{C} \cdot [z \cdot I - \hat{A}]^{-1} \cdot \hat{B} + \hat{D},$$

wobei $\hat{A} = A + F \cdot M^{-1} \cdot G$, $\hat{B} = B + F \cdot M^{-1} \cdot P$,

$$\hat{C} = C + L \cdot M^{-1} \cdot G, \quad \hat{D} = D + L \cdot M^{-1} \cdot P \quad \text{sind (vgl. Formel (33))}.$$

Nach geeigneter Umformulierung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z)}{\partial m_i} = & \frac{\partial \hat{C}}{\partial m_i} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \hat{C} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial m_i} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \\ & + \hat{C} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{B}}{\partial m_i} + \frac{\partial \hat{D}}{\partial m_i} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, \quad (152) \end{aligned}$$

wobei die m_i Multiplizierer-Koeffizienten sind.

Um die Berechnung mit Hilfe der Struktur-Matrix von Digitalfiltern deutlich zu machen, betrachten wir das **Beispiel 1** im 2. Kapitel. In diesem Beispiel treten zwei Koeffizienten b_1 , b_2 auf. Die Struktur-Matrix wurde schon im 2. Kapitel aufgestellt. Sie ist

$$G \left[\begin{array}{cc|cc} & \begin{matrix} A \\ | \\ 0 & 0 \\ | \\ 1 & 0 \\ | \\ \hline b_1 & b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} F \\ | \\ 1 & 0 \\ | \\ 0 & 0 \\ | \\ \hline 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} B \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \hline 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} C \\ | \\ 2 & 1 \\ | \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} L \\ | \\ 1 & 0 \\ | \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} D \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] \begin{matrix} E \\ \\ P \end{matrix} .$$

Die erste Ableitung der Matrix G ist jeweils durch

$$\frac{\partial G}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial G}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

gegeben.

Die Inverse der Matrix M ist

$$M^{-1} = I + E = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} .$$

So ergeben sich die Matrizen

$$\hat{A} = A + F \cdot M^{-1} \cdot G$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 + 2 & b_2 + 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}$$

$$= 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Die ersten Ableitung dieser Matrizen sind

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Formel (152) erhält man die Empfindlichkeit gegenüber Änderungen des

Koeffizienten b_1 durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(z)}{\partial b_1} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial b_1} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial b_1} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} \\ &= [1 \ 0] \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [b_1 + 2 \cdot b_2 + 1] \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z \cdot (z + 1)^2}{(z^2 - b_1 \cdot z - b_2)^2} \quad . \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(z)}{\partial b_2} &= [0 \ 1] \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [b_1 + 2 \cdot b_2 + 1] \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(z + 1)^2}{(z^2 - b_1 \cdot z - b_2)^2} \quad . \end{aligned} \quad (154)$$

Die Lösungen (153), (154) stimmen mit denen in [36] überein.

Die Verwendung der Gl. (152) ist für die Berechnung bei einem komplizierten digitalen Netzwerk besonders vorteilhaft, weil die Berechnung der Matrizen

$\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ nicht von der Frequenzvariablen abhängt. Im Gegensatz dazu enthalten die in anderen Arbeiten angegebenen strukturorientierten Matrizen z -Variable [31], [32], [80]. Daher muß eine dort entsprechende Umformung durchgeführt werden, um zur Zustandsdarstellung diese Matrizen so zu gestalten, daß sie frei von z -Variable sind.

Unter Anwendung der im 2. Kapitel vorgestellten Struktur-Matrix können die Differenzen dieser Matrix einfach berechnet werden. Z.B. ist die Struktur-Matrix eines Dreitor-Paralleladaptors mit einem reflexionsfreien Tor in VWDF-Darstellung durch

$$S = \begin{bmatrix} \gamma - 1 & 1 - \gamma & 1 \\ \gamma & -\gamma & 1 \\ \gamma & 1 - \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Die Ableitung der Matrix ist

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier kann man $\frac{\partial \hat{A}}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \hat{B}}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \hat{C}}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \hat{D}}{\partial \gamma}$ sofort erhalten, sofern die drei 1 und die drei -1 entsprechend in die Struktur-Matrix eingetragen werden. Mit Hilfe dieser Methode läßt die Genauigkeit relativ gut erhöhen.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, daß die Berechnungen nach dieser Methode mit dem theoretischen Ergebnis gut übereinstimmt.

Die Ableitung der Amplitude der Übertragungsfunktion ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} &= \frac{1}{2 |H_{21}|} \cdot \frac{\partial |H_{21}|^2}{\partial m_i} \\ &= \frac{1}{2 |H_{21}|} \cdot \frac{\partial (H_{21} \cdot H_{21}^*)}{\partial m_i} \\ &= \frac{1}{2 |H_{21}|} \cdot (H_{21} \cdot \frac{\partial H_{21}^*}{\partial m_i} + H_{21}^* \cdot \frac{\partial H_{21}}{\partial m_i}) \\ &= \frac{1}{|H_{21}|} \cdot \operatorname{Re} [H_{21}^* \cdot \frac{\partial H_{21}}{\partial m_i}] , \end{aligned} \quad (155)$$

wobei Leistungswellen angenommen werden.

Bei Verwendung von Spannungswellen ist

$$|H_{21}| = K \cdot |H'_{21}|$$

$$\text{mit } K = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} .$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} &= K \cdot \frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i} + |H'_{21}| \cdot \frac{\partial K}{\partial m_i} \\ &= \frac{K}{|H'_{21}|} \cdot \operatorname{Re} [H'_{21} \star \frac{\partial H'_{21}}{\partial m_i}] + |H'_{21}| \cdot \frac{\partial K}{\partial m_i} .\end{aligned}$$

Weil

$$\frac{\partial K}{\partial m_i} = \pm K \cdot \frac{1}{2m_i} \quad [75], \text{ so folgt}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} &= \frac{K}{|H'_{21}|} \cdot \operatorname{Re} [H'_{21} \star \frac{\partial H'_{21}}{\partial m_i}] \pm |H'_{21}| \cdot K \cdot \frac{1}{2m_i} \\ &= K \left\{ \frac{1}{|H'_{21}|} \cdot \operatorname{Re} [H'_{21} \star \frac{\partial H'_{21}}{\partial m_i}] \pm |H'_{21}| \cdot \frac{1}{2m_i} \right\} .\end{aligned}$$

Normalerweise ist $K = 1$, dann wird

$$\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} = \frac{1}{|H'_{21}|} \cdot \operatorname{Re} [H'_{21} \star \frac{\partial H'_{21}}{\partial m_i}] \pm |H'_{21}| \cdot \frac{1}{2m_i} . \quad (156)$$

In [75] ist erläutert, warum und wann die Empfindlichkeit den zusätzlichen additiven Summanden mit $\pm \frac{1}{2m_i}$ bei der Berechnung erhält.

Für den Dämpfungswert der Übertragungsfunktion $A = -20 \lg |H_{21}|$ erhält man

$$\frac{\partial A}{\partial m_i} = - \frac{20}{|H_{21}| \cdot \ln 10} \cdot \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} . \quad (157)$$

Einsetzen von Gl. (155) in Gl. (157) liefert unter Verwendung von Leistungswellen

$$\frac{\partial A}{\partial m_i} = - \frac{20}{|H_{21}|^2 \cdot \ln 10} \cdot \operatorname{Re} [H_{21} \star \frac{\partial H_{21}}{\partial m_i}] . \quad (158)$$

Einsetzen von Gl. (156) in Gl. (157) liefert unter Verwendung von Spannungswellen

$$\frac{\partial A}{\partial m_i} = - \frac{20}{|H'_{21}|^2 \cdot \ln 10} \cdot \operatorname{Re}[H'_{21} \cdot \frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i}] + \frac{20}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2m_i} \quad (159)$$

Im folgenden wird die Empfindlichkeitskurve der Digitalfilter mit Hilfe dieser Formeln berechnet und gezeichnet. Im **Beispiel 3** (Bild 2.8) treten es mehrere Multiplizierer auf. Wir betrachten nun die Empfindlichkeit gegenüber Änderungen eines Multiplizierer-Koeffizienten, und zwar des Koeffizienten γ_1 im Adaptor 1. Bild 5.1 zeigt das Dämpfungsverhalten eines Tiefpasses 9. Ordnung. Die entsprechenden relativen Empfindlichkeitskurven der Amplituden- bzw. Dämpfungsfunktion sind in Bild 5.2 und Bild 5.3 angegeben.

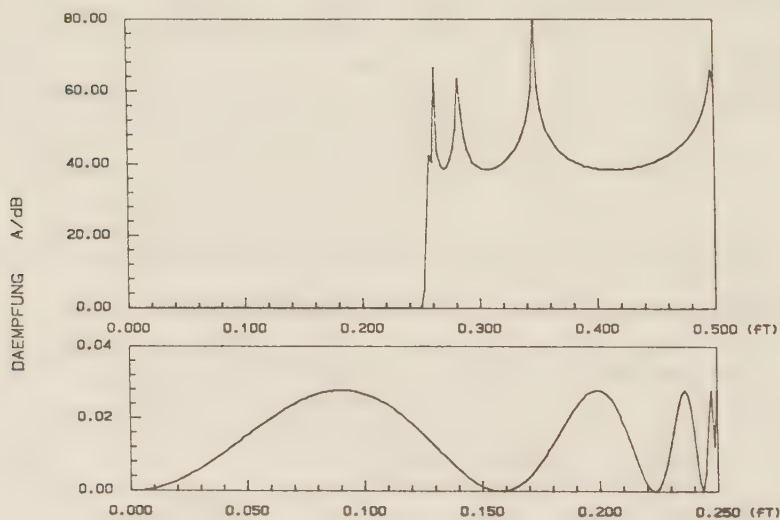


Bild 5.1 Dämpfungsverhalten eines Tiefpasses 9. Ordnung

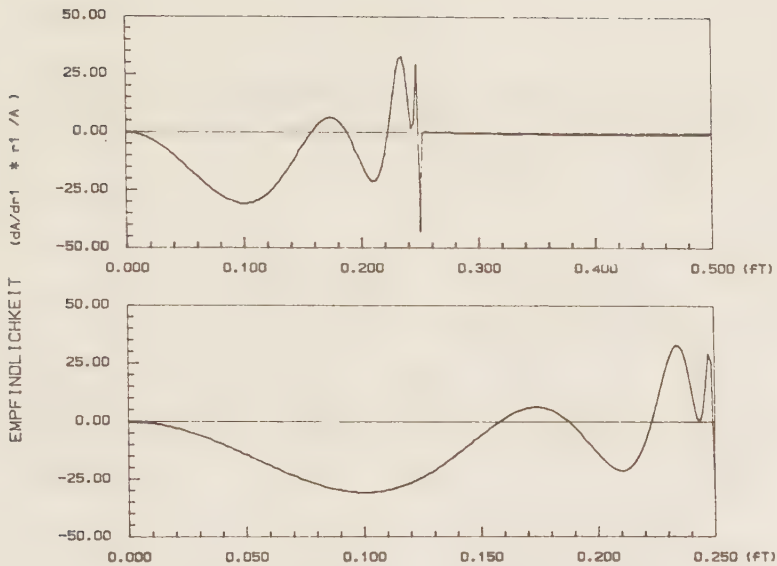


Bild 5.2 Empfindlichkeitskurve der Dämpfungsfunktion

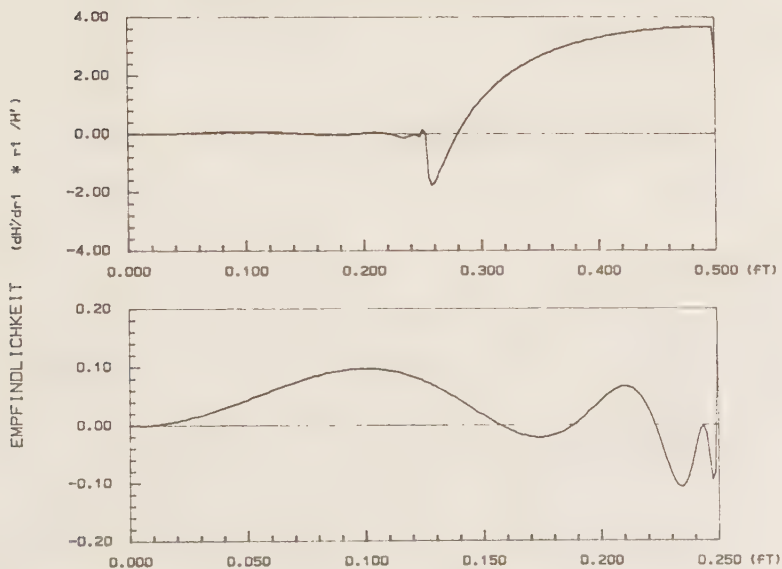


Bild 5.3 Empfindlichkeitskurve der Amplitudenfunktion

In diesen Bildern ist $H' = |H_{21}|$ angenommen.

Bild 5.4 zeigt ein Bandpaßfilter im Wellenflußdiagramm. Der entsprechende Dämpfungsverlauf wird in Bild 5.5 gezeigt, der Empfindlichkeitsverlauf jeweils in Bild 5.6 und in Bild 5.7 .

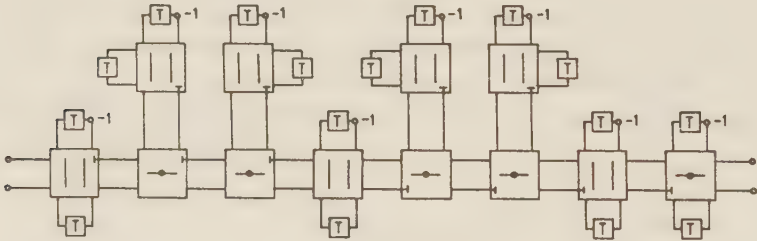


Bild 5.4 WDF-Struktur (Bandpaß 12. Ordnung)

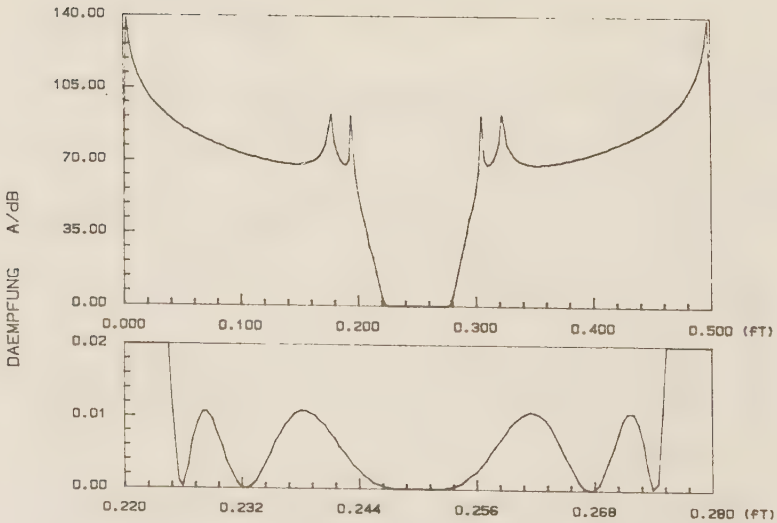


Bild 5.5 Dämpfungsverhalten eines Bandpasses 12. Ordnung

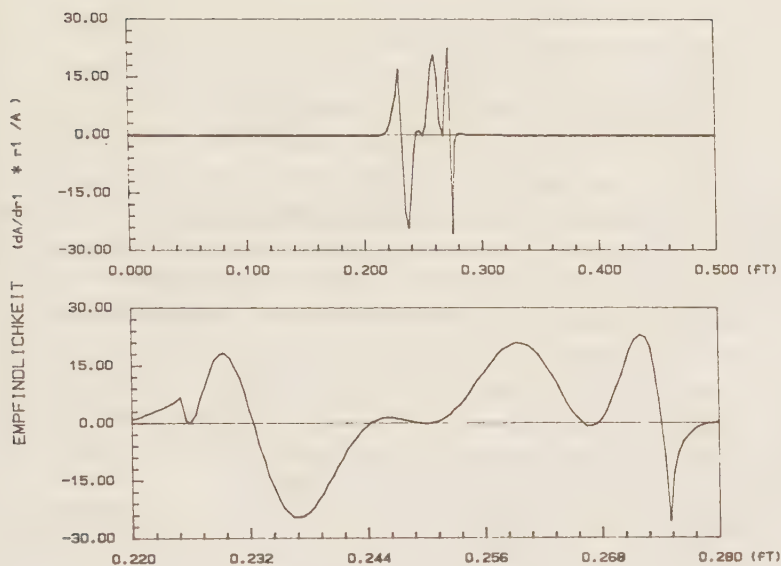


Bild 5.6 Empfindlichkeitskurve der Dämpfungsfunktion

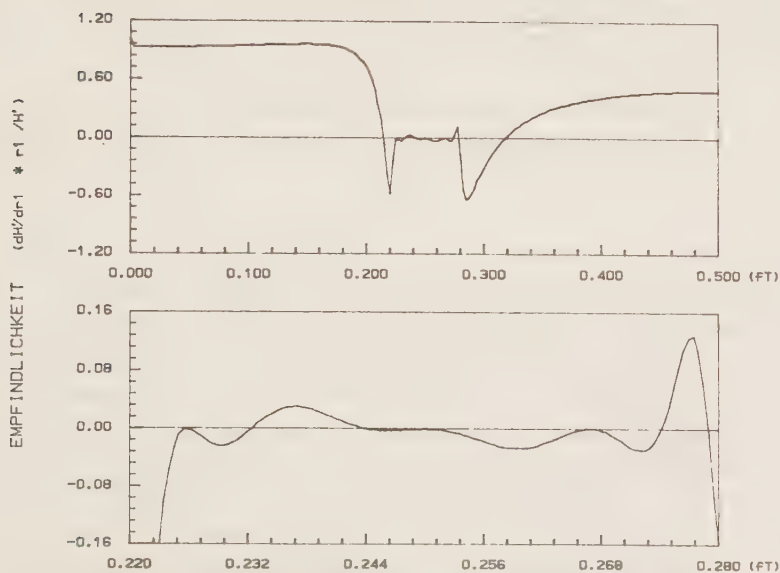


Bild 5.7 Empfindlichkeitskurve der Amplitudenfunktion

5.2 Passivität und Empfindlichkeit

Eine wesentliche Eigenschaft von Wellendigitalfiltern besteht darin, daß diese die Passivitätseigenschaft von Analogfiltern richtig nachbilden. Davon ausgehend kann man zeigen, daß Wellendigitalfilter viele attraktive Eigenschaften aufweisen, z.B. Stabilitätseigenschaften unter linearen Bedingungen und endlicher Arithmetik, günstigen Dynamikbereich usw. Im allgemeinen ist aber auch die Passivitätseigenschaft für Digitalfilter wichtig. Um die Passivitätseigenschaft von Digitalfiltern zu überprüfen, kann man außer der Betrachtung des Übertragungsfunktionverlaufs als weiteres Kriterium den Empfindlichkeitsverlauf mit heranziehen. Es konnte gezeigt werden, daß die Untersuchung der Empfindlichkeitseigenschaften der Übertragungsfunktion die Möglichkeiten der Interpretation der Übertragungsfunktion in ihrer Leistungsfähigkeit bei weitem übertrifft.

Betrachten wir nun die Bilder 5.1, 5.2, 5.3 sowie 5.5, 5.6, 5.7, so können wir den Zusammenhang zwischen Passivitätseigenschaft und Empfindlichkeit deutlich erkennen.

Angenommen, es ist $f/F = x$, wobei f die Frequenz und F die Abtastfrequenz sind. Vergleichen wir Bild 5.1 mit Bild 5.2 und Bild 5.3, so ist die relative Empfindlichkeit der Dämpfungsfunktion gegenüber den Koeffizienten γ_1

$$\left. \frac{\gamma_1}{A_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right|_{x = x_0} = 0, \quad (160)$$

wobei gilt

$$A_0 = \begin{cases} A_m & \text{im Durchlaßbereich} \\ A & \text{im Sperrbereich} \end{cases}$$

und A_m das Maximum im Durchlaßbereich ist, und $A(x_0) = 0$ ist.

Ähnlich haben wir auch

$$\left. \frac{\gamma_1}{|H_{21}|} \cdot \frac{\partial |H_{21}|}{\partial \gamma_1} \right|_{x = x_0} = 0. \quad (161)$$

Aus (158), (159) ergeben sich

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right|_{x = x_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial |H_{21}|}{\partial \gamma_1} \right|_{x = x_0} = 0. \quad (162)$$

Durch Untersuchung des Empfindlichkeitsverlaufs im Zusammenhang mit der Passivität ergibt sich die allgemeine Aussage:

Angenommen, es ist $F(x) = \frac{\partial A}{\partial \gamma}$.

Sei der Dämpfungswert $A(x_0) = 0$, so ist $F(x)$ für ein passives Digitalfilter Netzwerk im allgemeinen eine monotone stetige Funktion im Intervall $(x_0 - \Delta x_0, x_0 + \Delta x_0)$. Es gilt entweder

$$\begin{cases} F(x_0 + \Delta x_0) > 0 \\ F(x_0 - \Delta x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} F(x_0 + \Delta x_0) < 0 \\ F(x_0 - \Delta x_0) > 0 \end{cases},$$

wobei x_0 eine positive Zahl ist und Δx_0 eine sehr kleine positive Zahl sind.

Bekanntlich kann die Bauelementwertänderung (z.B. bei Induktivitäten, Kapazitäten) in Analogfilter keinen Einfluß auf die Passivitätseigenschaft ausüben. Entsprechend sind Parameter in Digitalfilter nur Multiplizierer-Koeffizienten. Wenn die Multiplizierer-Koeffizientenänderung im Digitalfilter keinen Einfluß auf die Passivitätseigenschaft bzw. Stabilitätseigenschaft ausübt, wirken die Multiplizierer-Koeffizienten im Digitalfilter wie passive Bauelemente im Analogfilter. Wenn die Digitalfilter diese Eigenschaft haben, wird die Passivitätseigenschaft der Analogfilter von den Digitalfiltern richtig nachgebildet. Der Empfindlichkeitsverlauf in diesem Digitalfilter folgt dann den oben beschriebenen Gesetzen. Die Kurve ist monoton und stetig in der Nähe von x_0 , wenn $A(x_0) = 0$ ist, wobei die Kurve in diesem Intervall durch die Nullstelle durchläuft.

Bei Benutzung des DOMAIN-Rechners ist das Intervall $\Delta x_0 < 0.00125$. Die Relation zwischen Empfindlichkeit und Dämpfungsfunktion existiert im Empfindlichkeitsverlauf jedes Multiplizierer-Koeffizienten. Daher wird die Passivitätseigenschaft von PWDF verschaulicht.

Die Wellendigitalfilter in Leistungswellen-Darstellung besitzen auf jeden Fall Passivitätseigenschaft, weil der abhängige Multiplizierer-Koeffizient eine entsprechende Wirkung auf die Änderung eines Multiplizierer-Koeffizienten ausübt oder die abhängigen Parameter nicht existieren, wenn die PWDF mit Hilfe des CORDIC-Prozessors [7], [55] unter Verwendung im 2. Kapitel der abgeleiteten Realisierungsmethode für Digitalfilter realisiert werden. Z.B. kann ein Zweiter-Adaptor in Leistungswellen-Darstellung wie folgt dargestellt

werden:

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \sqrt{1 - \alpha^2} & \alpha \end{bmatrix}. \quad (163)$$

Der Adaptor hat zwei Multiplizierer: α , $\sqrt{1 - \alpha^2}$. Ein beliebiger davon kann als von dem anderen abhängig angesehen werden.

Wenn wir das Zweitor-Adaptor als ein grundlegendes Element des CORDIC-Prozessors betrachten, so können wir den Ausdruck für den Zweitor-Adaptor umschreiben durch

$$\begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix}. \quad (164)$$

Die Operation für Rotation erfordert nur einen Parameter: ϕ , wobei der abhängige Parameter nicht auftritt. Ebenfalls weist der Dreitor-Adaptor mit reflexionfreiem Tor auch nur einen unabhängigen Parameter ϕ auf. Der Dreitor-Adaptor ohne reflexionfreies Tor erfordert zwei unabhängige Parameter ϕ_1 , ϕ_2 [7]. Deshalb lassen sich die abhängigen Multiplizierer-Koeffizienten von PWDF eliminieren, wenn die PWDF mit Hilfe eines CORDIC Prozessors [7], [55] unter Verwendung der Realisierungsmethode für Digitalfilter gemäß Kapitel 2 dieser Arbeit realisiert werden.

Aus den oben erläuterten Gründen kann die Parameteränderung keinen Einfluß auf Orthogonalität bzw. Passivität eines jeden Adaptors ausüben.

Bild 5.8 zeigt den Dämpfungsverlauf bei Koeffizientenänderung. Im Vergleich mit Bild 5.1 hat sich der Dämpfungsverlauf im Passband senkrecht aber nicht parallel nach oben verschoben. Senkrechte Verschiebung nach oben bedeutet die Erhaltung der Passivitätseigenschaft von PWDF, nicht parallele Verschiebung nach oben bedeutet die Unabhängigkeit der Torwiderstände der Übertragungsfunktion von PWDF. D.h., für jede Kombination der Koeffizienten ist die Passivitätseigenschaft bzw. Stabilitätseigenschaft von PWDF sichergestellt. Diese Erkenntnis spielt eine wichtige Rolle bei der zur Sicherung der Stabilität, bei der Optimierung und bei der Realisierung von adaptiven PWDF.

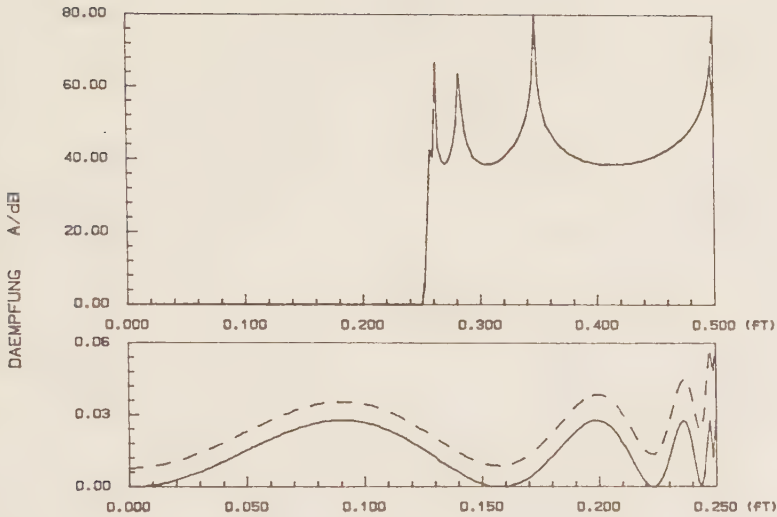


Bild 5.8 Dämpfungsverlauf bei Änderung der Koeffizienten
vor Quantisierung: - - - -
nach Quantisierung: —————

5.3 Zusammenhang zwischen Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber Multiplizierer-Koeffizientenänderungen

PWDF, die mit Hilfe von Adaptoren realisiert werden, haben abhängige und unabhängige Multiplizierer. Im Gegensatz dazu gibt es keine abhängigen Multiplizierer in PWDF, die mit Hilfe eines CORDIC-Prozessors realisiert werden. In Hinsicht auf die Wirkung der Multiplizierer kann man die abhängigen Multiplizierer auch als solche auffassen, die die ideale Stabilitätsbedingung erfüllen. Daher ist die Beschreibung für einen Dreitor-Adaptor

$$S = \pm \begin{bmatrix} \gamma_1^2 - 1 & \gamma_1 \sqrt{1 - \gamma_1^2} & \gamma_1 \\ \gamma_1 \sqrt{1 - \gamma_1^2} & -\gamma_1^2 & \sqrt{1 - \gamma_1^2} \\ \gamma_1 & \sqrt{1 - \gamma_1^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (165)$$

wobei $\gamma_3 = 1$ ist.

Die erste Ableitung der Matrix S ist

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma_1} = \pm \begin{bmatrix} 2\gamma_1 & \frac{1 - 2\gamma_1^2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} & 1 \\ \frac{1 - 2\gamma_1^2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} & -2\gamma_1 & \frac{-\gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} \\ 1 & \frac{-\gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (166)$$

Entsprechend Gl. (155) läßt sich der resultierende Verlauf im Frequenzbereich wie in Bild 5.2 und Bild 5.3 angeben.

Die Übertragungsfunktion des Einflusses der Veränderung des Multipliziererkoeffizienten $\Delta\gamma$ in der Nähe von $\hat{\gamma}$ ist

$$\begin{aligned} |H(\gamma_1)|_{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 + \Delta\gamma_1} &= |H(\gamma_1)|_{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1} + \frac{\partial |H(\gamma_1)|}{\partial \gamma_1} \bigg|_{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1} \cdot \Delta\gamma_1 \\ (|\Delta\gamma_1| \ll 1) \end{aligned} \quad (167)$$

Hierbei ist es möglich, die Quantisierungsstufe bzw. Optimierungsstufe für Koeffizienten sehr klein zu halten. Wenn der abhängige Multiplizierer nicht ideal ist, so daß die Stabilitätsbedingung nicht erfüllt werden kann, sollte deshalb der Ausdruck für die Empfindlichkeiten in Bezug auf die Multiplizierer-Koeffizienten genauer untersucht werden.

Die Übertragungsfunktion in Bezug auf Änderungen der Multiplizierer-Koeffizienten $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2$ kann man näherungsweise wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} |H'(\gamma_1, \gamma_2)|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 + \Delta\gamma_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 + \Delta\gamma_2}} &= |H'(\gamma_1, \gamma_2)|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} + \frac{\partial |H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial \gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_1 + \\ &\quad + \frac{\partial |H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial \gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial |H(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial \gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta \gamma_2$$

$$(|\Delta \gamma_1| \ll 1, |\Delta \gamma_2| \ll 1) \quad (168)$$

Hierbei sind γ_1, γ_2 Multiplizierer eines Dreitor-Adaptors, und zwar sind sie abhängig voneinander, d.h.

$$\hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_2^2 = 1, \quad (169a)$$

$$\text{und} \quad (\hat{\gamma}_1 + \Delta \gamma_1)^2 + (\hat{\gamma}_2 + \Delta \gamma_2)^2 = 1, \quad (169b)$$

wobei $\gamma_3 = 1$ ist.

Aus Gl. (169) erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_2 &= \sqrt{1 - (\hat{\gamma}_1 + \Delta \gamma_1)^2} - \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2} \\ &= \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2 - 2\hat{\gamma}_1 \cdot \Delta \gamma_1 - (\Delta \gamma_1)^2} - \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2} \\ &\approx \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2 - 2\hat{\gamma}_1 \cdot \Delta \gamma_1} - \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2} \end{aligned} \quad (170)$$

Wenn $\hat{\gamma}_1 \neq 1$ ($\hat{\gamma}_1 = 1$ bedeutet, daß es sich um einen entarteten Dreitor-Adaptor handelt) und $|\Delta \gamma_1| \ll 1$ sind, folgt aus (170)

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_2 &\approx \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2}} \cdot (-2\hat{\gamma}_1 \cdot \Delta \gamma_1) - \sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2} \\ &= \frac{-\hat{\gamma}_1}{\sqrt{1 - \hat{\gamma}_1^2}} \cdot \Delta \gamma_1 = -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2} \Delta \gamma_1, \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \gamma_2}{\Delta \gamma_1} \approx -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}, \quad (171a)$$

$$\text{oder} \quad \Delta \gamma_2 = -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2} \Delta \gamma_1 + e, \quad (171b)$$

wobei der Fehler e des Parameters als Zufallsgröße unter endlicher Arithmetik

betrachtet werden kann. Eigentlich sind die Bedingungen (169a), (169b) nur näherungsweise unter endlicher Arithmetik erfüllt, darüber hinaus existieren Fehler, die als Zufallsgrößen angenommen werden dürfen.

Wenn $H(x) = H'(x, y)$ ist, folgt aus Gl. (167) und Gl. (168)

$$\begin{aligned} \frac{d|H(\gamma_1)|}{d\gamma_1} \bigg|_{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1} \cdot \Delta\gamma_1 &= \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_1 + \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_2 \\ &\approx \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_1 + \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \left(-\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}\right) \cdot \Delta\gamma_1 \\ \frac{d|H(\gamma_1)|}{d\gamma_1} \bigg|_{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1} &\approx \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} + \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \left(-\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}\right) \end{aligned} \quad (172)$$

Gleichung (172) beschreibt die Beziehung zwischen Empfindlichkeiten und deren zugehörigen Dreitor-Adaptoren, die mit oder nicht mit abhängigem Multiplizieren ausgestattet sind.

Wenn $H(\gamma_1, \gamma_2) = H'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_3 \neq 1$ ist, wird

$$\Delta\gamma_3 \approx -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta\gamma_1 - \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta\gamma_2, \quad (173a)$$

$$\text{oder} \quad \Delta\gamma_3 = -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta\gamma_1 - \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta\gamma_2 + e, \quad (173b)$$

$$\frac{\partial|H(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_1 + \frac{\partial|H(\gamma_1, \gamma_2)|}{\partial\gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \cdot \Delta\gamma_2 = \frac{\partial|H'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)|}{\partial\gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} \cdot \Delta\gamma_1$$

$$+ \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} \cdot \Delta \gamma_2 + \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_3} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} \cdot \left(-\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta \gamma_1 - \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_3} \cdot \Delta \gamma_2 \right)$$

(174)

Aus Gl. (174) erhält man

$$\frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2) \right|}{\partial \gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \approx \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_1} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} + \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_3} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} \cdot \left(-\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_3} \right)$$

(175a)

$$\frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2) \right|}{\partial \gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2}} \approx \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_2} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} + \frac{\partial \left| \mathbf{H}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \right|}{\partial \gamma_3} \bigg|_{\substack{\gamma_1 = \hat{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} \cdot \left(-\frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_3} \right)$$

(175b)

Unter Verwendung von Leistungswellen kann die Stabilitätsanforderung bei der Koeffizientenvariation oder bei der Optimierung immer erfüllt werden, indem die entsprechenden Kontrollen nur im individuellen Adaptor, also besonders einfach durchgeführt werden. Das hat zur Folge, daß adaptive **WDF** nur auf der Basis der **PWDF** entwickelt werden müssen. In dieser besonders wertvollen Eigenschaft sind **PWDF** anderen Digitalfiltern überlegen. Wenn **PWDF** mit Hilfe eines **CORDIC**-Prozessors realisiert werden, kann ferner die Stabilitätsanforderung in Bezug auf Änderungen der Koeffizienten oder für die Optimierung automatisch erfüllt werden.

6. Diskrete Optimierung der Multiplizierer-Koeffizienten von Wellendigitalfiltern mit Leistungswellen

Wegen der begrenzten Wortlängen im Rechner können die Koeffizienten und Signale nur näherungsweise dargestellt werden. Daraus ergibt sich eine Abweichung von den gewünschten Systemeigenschaften. Durch Vergrößerung der Wortlängen und der Rechengenauigkeit bei den arithmetischen Operationen läßt sich der Einfluß dieser Abweichungen beliebig klein halten. Außerdem können die Digitalfilterstrukturen, deren Empfindlichkeit gegenüber Veränderungen der Multiplizierer-Koeffizienten ja eine entscheidende Rolle spielt, die Abweichungen von den gewünschten Systemeigenschaften stark beeinflussen. Es ist allgemein bekannt, daß beidseitig resistiv abgeschlossene verlustfreie Abzweigfilter nur eine geringe Toleranzempfindlichkeit besitzen. Die Nachbildung dieses Typs ist deshalb besonders nützlich. Die Theorie der Wellendigitalfilter und die Methoden ihrer Realisierung verwirklichen die Übertragung von Analogfiltern in Digitalfilter. Wellendigitalfilter in Leistungswellen-Darstellung bilden nun Analogfilter eigentlich von der Leistung-Seite her nach, denn in PWDF treten Eigenschaften auf, die sich auf die Leistung beziehen. Dazu gehören z.B. Passivität, die Eigenschaft der Verlustfreiheit, Stabilität bei der Realisierung, geringe Empfindlichkeit usw. Das mathematische Modell von PWDF beschreibt im wesentlichen die Orthogonalität und beschränkt sich nur auf die aus Leistungsgrößen der Analogfilter hergeleitete Eigenschaften. Im vorliegenden Kapitel werden die Abschätzung der erforderlichen Wortlänge der Multiplizierer-Koeffizienten hergeleitet und eine Optimierungsmethode angegeben. Dabei wird die Untersuchung auf den Empfindlichkeitseigenschaften aufgebaut. Für die Darstellung der Multiplizierer-Koeffizienten und Signale werden die Festkommagrößen benutzt.

6.1 Statistische Abschätzung der erforderlichen Wortlänge der Multiplizierer-Koeffizienten

Wenn die Koeffizienten wie Zufallsgrößen behandelt werden, kann man daraus eine Methode zur Abschätzung der erforderlichen Wortlänge der Koeffizienten ableiten. Die statistische Abschätzung der erforderlichen Wortlänge ist ein wichtiger Faktor, der einerseits die Empfindlichkeitseigenschaften von Digitalfilterstrukturen näher bestimmt, andererseits als Anfangswert bei der Optimierung gelten kann. Letzterers wird in Abschnitt 6.2

dargestellt. Vorangehende Untersuchungen dieser Art wurden in [9], [36], [77], [84] veröffentlicht. Für die Wellendigitalfilter gibt es verschiedene Ansätze. Die Multiplizierer-Koeffizienten von VWDF sind unabhängig voneinander. PWDF, die mit Hilfe des CORDIC-Prozessors realisiert werden, haben auch unabhängige Parameter. Im Gegensatz dazu benötigt die statistische Abschätzung der erforderlichen Wortlänge für die PWDF, deren Bestandteil-Adaptoren sowohl unabhängige als auch abhängige Multiplizierer-Koeffizienten aufweisen, eine modifizierte Formel, wie sie in [77] angegeben wurde.

6.1.1 Abschätzung der erforderlichen Wortlänge von PWDF, deren Parameter unabhängig voneinander sind

Wenn die Fehler Δm_i der Parameter als Zufallsgrößen angesetzt werden, kann man sie mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auswerten.

$$p(\Delta m_i) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} \leq \Delta m_i \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (176)$$

Wir haben

$$E\{\Delta m_i\} = 0, \quad (177)$$

$$\sigma_{\Delta m_i}^2 = \frac{q^2}{12}. \quad (178)$$

Die Abweichung $\Delta |H_{21}|$ von Übertragungsfunktion $|H_{21}|$ kann als Zufallsgröße dargestellt werden. Nach Taylor folgt hieraus

$$\Delta |H_{21}| = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i}, \quad (179)$$

wobei $\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i}$ bereits in Abschnitt 5.1 angegeben wurde.

Aus Gl. (177) ergibt sich

$$E\{\Delta |H_{21}|\} = E\left\{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} E\{\Delta m_i\} = 0 . \quad (180)$$

Da die Parameter unabhängig voneinander sind, ist Δm_i unabhängig von Δm_j ($i \neq j$). So folgt

$$\sigma_{\Delta |H_{21}|}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta m_i}^2 \cdot \left(\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} \right)^2 . \quad (181)$$

Aus Gl. (178), Gl. (181) ergibt sich

$$\sigma_{\Delta |H_{21}|}^2 = \frac{q^2}{12} \cdot S_T^2 , \quad (182)$$

$$\text{wobei} \quad S_T^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} \right)^2 \quad (183)$$

ist. Für großes n kann man $\Delta M = \Delta |H_{21}|$ näherungsweise als Gauss-Verteilung betrachten [36], [84].

Die Gauss-Verteilungsdichtefunktion ist

$$\rho(\Delta M) = \frac{1}{\sigma_{\Delta M} \sqrt{2\pi}} e^{-\Delta M^2 / 2\sigma_{\Delta M}^2} , \quad -\infty < \Delta M < \infty .$$

Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit Y von ΔM im Bereich $-\Delta M' < \Delta M < \Delta M'$

$$Y = P(|\Delta M| < \Delta M') = \frac{2}{\sigma_{\Delta M} \sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta M'} e^{-\Delta M^2 / 2\sigma_{\Delta M}^2} d(\Delta M) .$$

Seien

$$\Delta M = x \cdot \sigma_{\Delta M} , \quad \Delta M' = x_1 \cdot \sigma_{\Delta M} ,$$

so liefert die Standardform

$$Y = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-x^2/2} dx . \quad (184)$$

Wenn der Faktor Y in brauchbarer Größe gewählt wird, kann man den entsprechenden Wert x_1 aus den bekannten Tabellen erhalten. Die statistische Wortlänge, die

$$\Delta M' \leq \Delta M_{\max} = \Delta |H_{21}|_{\max}$$

erfüllt ist, ist

$$q \leq \frac{\sqrt{12} \Delta |H_{21}|_{\max}}{x_1 \cdot S_T} \quad (185)$$

wobei $\Delta |H_{21}|_{\max}$ durch die Amplitudeanforderung bestimmt ist.

Die Wortdarstellung ist im Rechner wie folgt beschrieben:

$$m = \sum_{i=-k}^j b_i \cdot 2^i$$

Die Wortlänge beträgt

$$L = 1 + j + k \quad (186)$$

Da $k = \log_2 \frac{1}{q}$ ist, wird

$$L(\omega) = 1 + j + \log_2 \frac{x \cdot S_T}{\sqrt{12} \Delta |H_{21}|_{\max}} \quad (187)$$

Wenn $Y = 0.95$ gewählt wird, ist $x_1 = 2$. So folgt

$$L(\omega) = 1 + j + \log_2 \frac{S_T}{\sqrt{3} \Delta |H_{21}|_{\max}} \quad (188)$$

Diese Formel gilt für Digitalfilter ganz allgemein. Man muß dabei berücksichtigen, daß die Parameter von Digitalfiltern unabhängig voneinander sind. Wenn ihre Parameter unabhängig voneinander sind, gilt

$$S_T^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} \right)^2$$

Über den anderen Fall von Digitalfiltern mit abhängigen Parametern wird im Abschnitt 6.1.2 diskutiert.

Bild 6.1 und Bild 6.2 zeigen die statistische Wortlänge für zwei Beispiele, wobei $L(f_T)$ ohne Berücksichtigung des Vorzeichenbits berechnet wird und $S_{(\gamma, f_T)}$ eine gleiche Bedeutung wie S_f hat und wobei n wie in Gl. (183) die Anzahl der unabhängigen Multiplizierer darstellt. Hierbei sind $j = 0$, $n = 14$ (Bild 6.1) bzw. $n = 17$ (Bild 6.2).

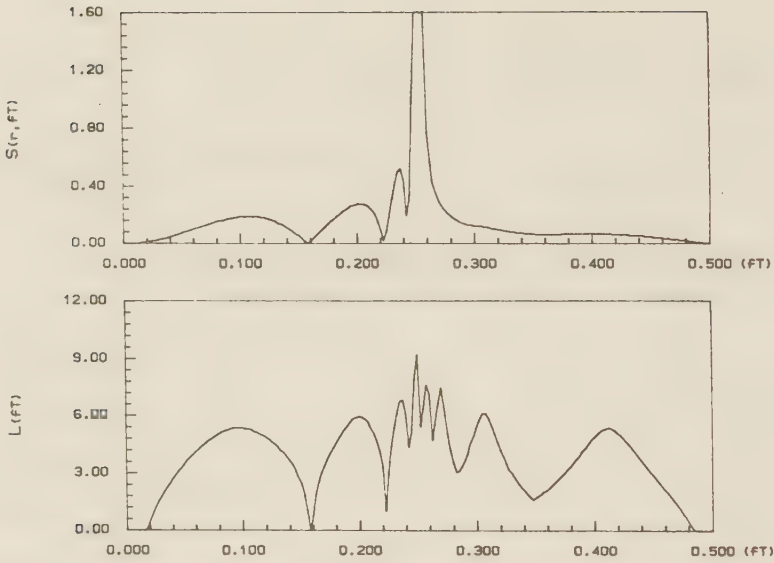


Bild 6.1 Statistische erforderliche Wortlänge eines Tiefpasses 9. Ordnung
(s. Bild 2.8)

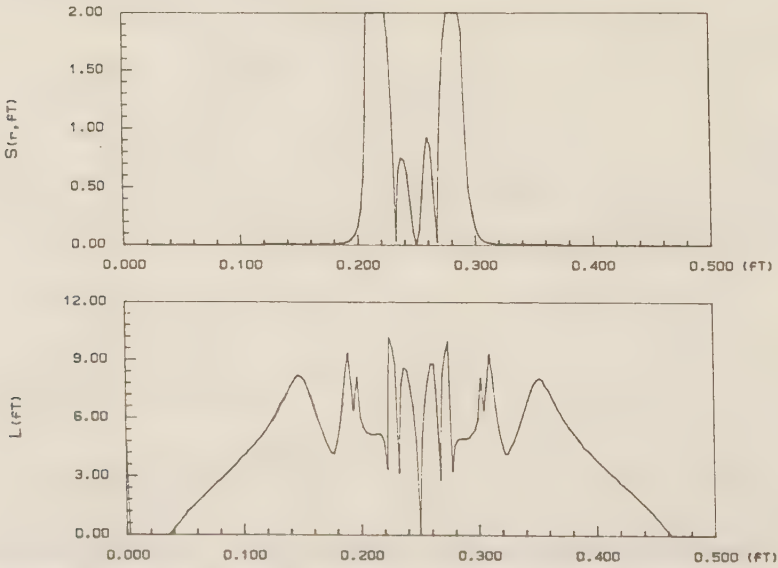


Bild 6.2 Statistische erforderliche Wortlänge eines Bandpasses 12. Ordnung
(s. Bild 5.4)

6.1.2 Abschätzung der erforderlichen Wortlänge von PWDF, deren Parameter abhängig voneinander sind

Die Abweichung $\Delta |H_{21}|$ der Übertragungsfunktion $|H_{21}|$ wurde im letzten Abschnitt angegeben:

$$\Delta |H_{21}| = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} \quad (189)$$

Um die Varianz der Abweichung von der Übertragungsfunktion zu berechnen, betrachten wir die Eigenschaften der im folgenden näher untersuchten Funktion $F(x_1)$.

1. Angenommen sei eine Funktion $F(x_1) = F'(x_1, x_2)$, deren Argumente x_1, x_2 abhängig sind, dargestellt durch

$$F'(x_1, x_2) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2, \quad (190)$$

$$(1) \quad x_2 = b \cdot x_1 \quad \text{unter unendlicher Arithmetik,} \quad (191a)$$

$$(2) \quad x_2 = b \cdot x_1 + e \quad \text{unter endlicher Arithmetik,} \quad (191b)$$

wobei a_1, a_2, b konstant sind und e ein Fehler ist.

Die Varianz von $F(x_1)$ ist σ_F^2 , unter unendlicher Arithmetik ist

$$\sigma_F^2 = \sigma_{F'}^2 = (a_1 + a_2 \cdot b) \sigma_{x_1}^2. \quad (192)$$

Unter endlicher Arithmetik ist die Varianz von $F'(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} \sigma_{F'}^2 &= E[F'^2] - (E[F'])^2 \\ &= (a_1 + a_2 \cdot b)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \cdot \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (193)$$

$$= \sigma_F^2 + a_2^2 \cdot \sigma_e^2. \quad (194)$$

2. Angenommen sei eine Funktion $F(x_1, x_2) = F'(x_1, x_2, x_3)$, die wie folgt dargestellt werden kann,

$$F'(x_1, x_2) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 \quad (195)$$

$$(1) \quad x_3 = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \quad \text{unter unendlicher Arithmetik,} \quad (196a)$$

$$(2) \quad x_3 = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + e \quad \text{unter endlicher Arithmetik,} \quad (196b)$$

wobei a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 konstant sind und x_1 unabhängig von x_2 ist.

Unter endlicher Arithmetik ist die Beziehung zwischen σ_F^2 und $\sigma_F'^2$

$$\begin{aligned}\sigma_F'^2 &= E[F'^2] - (E[F'])^2 \\ &= (a_1 + a_3 \cdot b_1)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + (a_2 + a_3 \cdot b_2)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + a_3^2 \cdot \sigma_e^2 \\ &= \sigma_F^2 + a_3^2 \cdot \sigma_e^2.\end{aligned}\quad (197)$$

Fassen wir die zwei Fälle zusammen, erhalten wir die Varianz

$$\sigma_F'^2 = \sigma_F^2 + \sum_{j=1}^m c_j^2 \cdot \sigma_e^2, \quad (198)$$

wobei m die Zahl der abhängigen Parameter und c_j der entsprechende Koeffizient sind. Die Argumente der Funktion F enthalten nur unabhängige Parameter. Offensichtlich ist die Varianz unter endlicher Arithmetik größer als die unter unendlicher Arithmetik.

Für PWDF, deren Parameter abhängig voneinander sind, kann der Fehler, der durch Quantisierung und zur Erfüllung der Stabilitätsbedingung

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 \leq 2 \quad (199)$$

verursacht wird, als eine zusätzliche Zufallsgröße aufgefaßt werden.

Bei Betrachtung der Gl. (179) wird nun die Abweichung

$$\Delta |H'_{21}| = \sum_{i=1}^{n+m} \Delta m_i \cdot \frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i},$$

wobei n die Anzahl der unabhängigen Multiplizierer und m die Anzahl der abhängigen Multiplizierer bezeichnet, mit H'_{21} als der Übertragungsfunktion unter endlicher Arithmetik.

Unter Berücksichtigung der Gl. (171b), (173b), (172), (175) erhält man nach ganz der entsprechenden Umformulierung, wie sie oben durchgeführt wurde:

$$\Delta |H'_{21}| = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \Delta m_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} b_i \cdot e_i, \quad (200)$$

wobei $a_i \approx \frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$

$$b_i \approx \frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m,$$

mit H_{21} als der Übertragungsfunktion unter unendlicher Arithmetik und mit H'_{21} als der Übertragungsfunktion unter endlicher Arithmetik.

Wenn Δm_i , e_i statistisch unabhängig voneinander sind, so folgt die Varianz der Abweichung von der Übertragungsfunktion mit

$$\sigma^2_{\Delta |H'_{21}|} = \frac{q^2}{12} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} b_i^2 \right) = \frac{q^2}{12} \cdot S_T^2,$$

wobei

$$S_T^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial |H_{21}|}{\partial m_i} \right)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} \left(\frac{\partial |H'_{21}|}{\partial m_i} \right)^2. \quad (201)$$

Die Argumente der Übertragungsfunktion H_{21} enthalten nur unabhängige Multiplizierer-Koeffizienten sowie außerdem die abhängigen Multiplizierer-Koeffizienten unter unendlicher Arithmetik. Im Gegensatz dazu enthalten die Argumente der Übertragungsfunktion H'_{21} die unabhängigen und abhängigen Multiplizierer-Koeffizienten.

Aus Gl. (201) ist deutlich zu erkennen, daß die erforderliche Wortlänge der Multiplizierer-Koeffizienten von PWDF, deren Parameter abhängig voneinander sind, größer als die von VWDF ist, deren Parameter unabhängig voneinander sind.

6.2 Diskrete Optimierung der Multiplizierer-Koeffizienten von PWDF

Ein Digitalfilter besteht aus Addierern, Multiplizierern und Verzögerern. Darin müssen die Multiplizierer-Koeffizienten in digitaler Form realisiert werden. Bei der Quantisierung der idealen Multiplizierer-Koeffizienten weicht die reale Übertragungsfunktion von der idealen ab, so daß eine diskrete Optimierung der Multiplizierer-Koeffizienten notwendig wird. Hierzu muß man zunächst das Kriterium für die diskrete Optimierung festlegen. Unter Berücksichtigung der Kostenfunktion der Brücken-Wellendigitalfilter wurde eine diskrete Optimierungsmethode in [42] vorgestellt. Ein PWDF hat mehr Multiplizierer als ein VWDF. Um die innere Stabilität des PWDF bei der Optimierung nicht zu gefährden, muß die Stabilitätsbedingung jedes Bestandteiles bzw. Adaptors bei der diskreten Optimierung betrachtet werden. Wie im 2. Kapitel erläutert, kann die digitale Realisierung eines PWDF parallel durchgeführt werden. Daher steht die maximale Laufzeit eines Adaptors im Vordergrund der Überlegungen. Es scheint demnach ein nützliches Vorgehen zu

sein, die diskrete Optimierung mit Hilfe der Empfindlichkeit der Multiplizierer-Koeffizienten durchzuführen. Die Abweichung der Übertragungsfunktion kann man durch die Entwicklung in eine Taylorreihe berechnen, so daß die Rechenzeit wesentlich verkleinert wird. Wenn die Koeffizienten von ihren Anfangswerten stark abweichen, ist jedoch die Approximation der Übertragungsfunktion durch eine Taylorreihe nicht mehr anwendbar. In diesem Fall kann man auch die Approximation mit Hilfe der Struktur-Matrix unter Verwendung der Zustandsdarstellung erhalten.

6.2.1 Berechnung der Übertragungsfunktion bei der Optimierung mit Hilfe der Zustandsdarstellung

Die Übertragungsfunktion wurde bereits im 2. Kapitel angegeben:

$$H(z) = \hat{C} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \hat{D}.$$

Durch die Änderung der Multiplizierer-Koeffizienten werden die Matrizen verändert:

$$\begin{aligned} \hat{A} &\longrightarrow \hat{A} + \Delta \hat{A} \\ \hat{B} &\longrightarrow \hat{B} + \Delta \hat{B} \\ \hat{C} &\longrightarrow \hat{C} + \Delta \hat{C} \\ \hat{D} &\longrightarrow \hat{D} + \Delta \hat{D}. \end{aligned} \quad (202)$$

So folgt die Übertragungsfunktion

$$H'(z) = (\hat{C} + \Delta \hat{C}) \cdot [z \cdot I - (\hat{A} + \Delta \hat{A})]^{-1} \cdot (\hat{B} + \Delta \hat{B}) + \hat{D} + \Delta \hat{D}. \quad (203)$$

Um den Zusammenhang zwischen $(z \cdot I - \hat{A})^{-1}$ und $(z \cdot I - \hat{A} - \Delta \hat{A})^{-1}$ zu erläutern, nehmen wir an, daß

$$(z \cdot I - \hat{A})^{-1} = A_0, \quad (204a)$$

$$(z \cdot I - \hat{A} - \Delta \hat{A})^{-1} = A_\sigma, \quad (204b)$$

gilt.

Aus Gl. (204) ergibt sich

$$I = (z \cdot I - \hat{A} - \Delta \hat{A}) \cdot A_\sigma,$$

$$\mathbf{I} + \Delta \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\sigma} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\sigma} ,$$

$$\hat{\mathbf{A}}_0 \cdot (\mathbf{I} + \Delta \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\sigma}) = \hat{\mathbf{A}}_{\sigma} ,$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{\sigma} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_0 \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{A}}_0 . \quad (205a)$$

Es ist nämlich

$$(\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} - \Delta \hat{\mathbf{A}})^{-1} = [\mathbf{I} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}]^{-1} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} . \quad (205b)$$

Durch Einsetzen von Gl. (205b) in Gl. (203) erhält man

$$\mathbf{H}'(\mathbf{z}) = (\hat{\mathbf{C}} + \Delta \hat{\mathbf{C}}) \cdot [\mathbf{I} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}]^{-1} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{B}} + \Delta \hat{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{D}} + \Delta \hat{\mathbf{D}} . \quad (206)$$

Wenn die Abweichung von den idealen Koeffizienten klein ist, d.h. die Koeffizienten in der Nähe ihrer idealen Werte quantisiert sind, werden die Elemente der Matrizen $\Delta \hat{\mathbf{A}}$, $\Delta \hat{\mathbf{B}}$, $\Delta \hat{\mathbf{C}}$, $\Delta \hat{\mathbf{D}}$ ebenfalls klein.

Wenn wir alle Glieder $[(\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}]^n$ für $n > 1$ vernachlässigen, wird

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}]^{-1} \approx \mathbf{I} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}} . \quad (207)$$

Einsetzen von Gl. (207) in Gl. (206) ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\mathbf{z}) &= (\hat{\mathbf{C}} + \Delta \hat{\mathbf{C}}) \cdot [\mathbf{I} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}] \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{B}} + \Delta \hat{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{D}} + \Delta \hat{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{z}) + \Delta \mathbf{H}(\mathbf{z}) , \end{aligned} \quad (208)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H}(\mathbf{z}) &\approx \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \Delta \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \\ &+ \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{B}} + \Delta \hat{\mathbf{D}} , \end{aligned} \quad (209)$$

wobei $\Delta \hat{\mathbf{C}} \cdot [\mathbf{I} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}}] \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{B}} \approx 0$ angenommen ist, weil die Differenzen $\Delta \hat{\mathbf{C}}$, $\Delta \hat{\mathbf{B}}$ gleichzeitig in diesem Glied auftreten. Ebenfalls gilt:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} &\approx 0 , \\ \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{B}} &\approx 0 . \end{aligned}$$

Weil die erste Ordnung der Matrizen $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ im allgemeinen konstant ist (besonders bei WDF), werden die Ordnungen größer als 1 verschwinden. Nach der Taylorreihe sind

$$\Delta \hat{A} = \sum_i \frac{\partial \hat{A}}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i, \quad (210a)$$

$$\Delta \hat{B} = \sum_i \frac{\partial \hat{B}}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i, \quad (210b)$$

$$\Delta \hat{C} = \sum_i \frac{\partial \hat{C}}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i, \quad (210c)$$

$$\Delta \hat{D} = \sum_i \frac{\partial \hat{D}}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i, \quad (210d)$$

wobei m_i ein Multiplizierer-Koeffizient ist.

Durch Einsetzen von Gl. (210) und Gl. (152) in Gl. (209) erhält man

$$\begin{aligned} H'(z) &\approx H(z) + \sum_i \left\{ \hat{C} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial m_i} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \hat{C}}{\partial m_i} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \hat{C} \cdot (z \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{B}}{\partial m_i} + \frac{\partial \hat{D}}{\partial m_i} \right\} \cdot \Delta m_i, \\ &= H(z) + \sum_i \frac{\partial H(z)}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i. \end{aligned} \quad (211)$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß man das Optimum in Zustandsdarstellung auch mit Hilfe der Taylorreihe erhalten kann. Um das globale Optimum zu finden, steht Gl. (203) zur Berechnung der Übertragungsfunktion zur Verfügung.

6.2.2 Beschreibung des diskreten Optimierungsalgorithmus

Das diskrete Optimum kann mit Sicherheit gefunden werden, wenn alle diskreten Gitterpunkte in einem hinreichend großen Raum um alle Koeffizienten herumuntersucht werden. Die Globalsuche ist nämlich nur für solche Digitalfilter wirksam, die wenige Koeffizienten benötigen. Bei einem Digitalfilter, das viele Koeffizienten benötigt, erscheint dieses Verfahren dagegen nicht geeignet. Daher entstanden in den letzten Jahren viele

Verfahren, in denen die diskrete Optimierung von Digitalfiltern behandelt wurden [9], [15], [24], [42], [77], [84], [85], [93].

In vorliegenden Abschnitt wird ein Verfahren auf der Basis der Berechnung der Empfindlichkeit gegenüber Koeffizientenänderungen vorgestellt. Im Grunde genommen müßte die Empfindlichkeit gegenüber Parameteränderungen auf die diskrete Optimierung einen großen Einfluß ausüben, obwohl sich ein diskretes System in der Optimierung vom kontinuierlichen System unterscheidet. Ein solches Verfahren unter Benutzung der Berechnung der Empfindlichkeit gegenüber Koeffizientenänderung dürfte daher effektiv sein. Im allgemeinen spielen der Anfangswert (z.B. eine erforderliche Wortlänge) und die Suchstrategie des Optimierungsalgorithmus eine entscheidende Rolle. Besonders ist das wichtig für ein Digitalfilter mit mehreren Koeffizienten. Das hat zur Folge, daß der Rechenaufwand erheblich reduziert wird. Als Anfangswert kann die in den letzten Abschnitten erwähnte statistische erforderliche Wortlänge gewählt werden und zwar wegen der Möglichkeit der genaueren Berechnung der Empfindlichkeit der Multiplizierer-Koeffizienten. Der grundlegende Gedanke zur Suchstrategie ist die Bestimmung der Suchpriorität der Koeffizienten bei der Optimierung. Das kann aber von Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion abhängig gemacht werden. Bei einigen ausgezeichneten Frequenzen wird erst die Suchpriorität bestimmt. Danach wird die Suchrichtung für den Zielfunktionswert derart ausgewählt, daß der Koeffizient, der mit Priorität 1 eingeordnet ist, in einem bestimmten Intervall variiert wird, dann der zweite Koeffizient, der dritte Koeffizient usw.

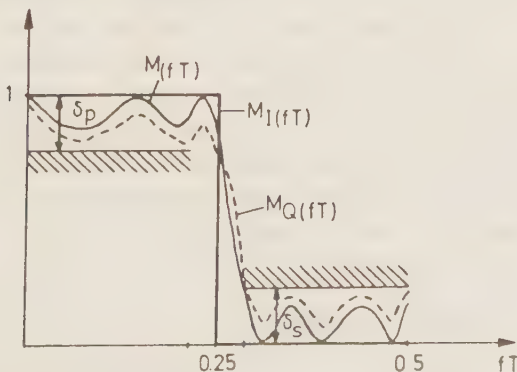


Bild 6.3 Übertragungsfunktion unter Koeffizientenquantisierung

Die Zielfunktion wird anhand der Dämpfungsanforderung oder Amplitudenanforderung wie folgt definiert: Seien $M_I(f_T)$ die ideale Amplitudenfunktion eines Digitalfilters (Bild 6.3),

wobei $M(f_T)$ die ideale Amplitudenfunktion ohne Koeffizientenquantisierung und

$M_Q(f_T)$ die Amplitudenfunktion mit Koeffizientenquantisierung sind,

so ergibt sich die Fehlerfunktion zu

$$\varepsilon(f_T) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_D} (1 - M_Q(f_T)) & \text{im Durchlaßbereich} \\ \frac{1}{\delta_S} M_Q(f_T) & \text{im Sperrbereich} \end{cases} \quad (212)$$

Das Ziel einer diskreten Optimierung ist erreicht, wenn

$$0 \leq \varepsilon(f_T) \leq 1 \quad (213)$$

unter Berücksichtigung der Amplitudenanforderung und der Passivität bzw. Stabilität erfüllt ist.

Die Funktion $M_Q(f_T)$ kann mit Hilfe entweder der Gl. (211) oder der Gl. (203) berechnet werden, je nachdem, ob der Koeffizient von seinem Wert abweicht, in dem die Empfindlichkeit berechnet wurde. Dabei sind

$$M(f_T) = |H_{21}(z)| \quad \text{in Gl. (211),}$$

$$M_Q(f_T) = |H'_{21}(z)| \quad \text{in Gl. (203).}$$

Im Prinzip braucht man die Fehlerfunktion nicht bei allen Frequenzen zu berechnen. Die Stellvertreter zeichnen die ausgezeichneten Frequenzen aus. Im allgemeinen wählt man die ausgezeichneten Frequenzen bei den Dämpfungsmaxima im Durchlaßbereich und den Dämpfungsminima im Sperrbereich. Für VWDF müssen die zu den Dämpfungsminima im Durchlaßbereich gehörenden Frequenzen ausgezeichnet werden. Für PWDF müssen die abhängigen Koeffizienten jedes Adaptors gemäß der Änderung der unabhängigen Koeffizienten verändert werden, um die Stabilitätsbedingung jedes Adaptors zu erfüllen. Man muß also γ_i eines Adaptors so quantisieren, daß

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 \leq 2 \quad \text{ist.}$$

Ähnliches gilt beim CORDIC-Prozessor (s. (164)):

$$\cos \phi \rightarrow c, \quad \sin \phi \rightarrow s,$$

worin c und s quantisierte Werte sind. Dann muß

$$c^2 + s^2 \leq 1 \quad \text{sein.}$$

Die Suchstrategie ist so zu gestalten, daß erst die Suchpriorität jedes Koeffizienten bei einer ausgezeichneten Frequenz gemäß seinem Einfluß auf die Übertragungsfunktion bestimmt wird, dann die Suchrichtung oder der weiter untersuchte Koeffizientenvektor in Richtung auf den Zielfunktionswert bei der Variation der Koeffizienten jeweils nach seiner Suchpriorität ausgewählt wird. Weiterhin wird das gleiche der nächsten ausgezeichneten Frequenz untersucht. Der Algorithmus ist abgeschlossen, wenn nacheinander alle Koeffizienten in der angegebenen Weise variiert worden sind. Konkret gesprochen, hängt die Suchstrategie von dem Betrag der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion ab. Z.B. ist Suchpriorität des **Beispiels 3** (s. Tabelle 6.4) ist in **Tabelle 6.5** eingetragen worden. Die entsprechenden Multiplizierer sind dort eingeordnet.

Adaptor (Nr.)	Multipliziere (Nr.)
1	1, 2
2	3, 4
3	5, 6
4	7, 8
5	9, 10
6	11, 12
7	13, 14, 15
8	16, 17
9	18, 19
10	20, 21
11	22, 23
12	24, 25
13	26, 27

Tabelle 6.4 Einordnung der Multiplizierer von **Beispiel 3**

Dieses PWDF hat 27 Multiplizierer-Koeffizienten. Darunter sind 14 unabhängige und zwar 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26. Die anderen sind abhängig von oben erwähnten Multiplizierern. Die Suchpriorität trifft nur auf den unabhängigen Multiplizierer-Koeffizienten zu. Die abhängigen Multiplizierer müssen unter endlicher Arithmetik so quantisiert werden, daß die Stabilitätsbedingung erfüllt ist. Außerdem enthält jeder Adaptor noch einige Multiplizierer, deren Koeffizienten jeweils gleich den Koeffizienten der unabhängigen und abhängigen Multiplizierer sind.

Frequenz (fT)	Suchpriorität (Koeff. Nr.)													
0.09056541	15	1	13	20	26	7	3	22	9	16	5	24	11	18
0.1992410	13	15	7	20	3	1	26	22	11	9	16	24	5	18
0.2363431	11	18	15	7	13	20	24	3	5	1	26	22	9	16
0.2475440	18	11	13	15	24	20	7	5	3	9	1	26	22	16
0.2500000	18	11	15	13	20	24	7	5	3	9	16	1	26	22
0.2562863	18	11	24	7	20	15	13	5	3	9	22	1	16	26
0.2587396	18	11	24	7	20	15	13	5	3	9	22	1	26	16
0.2699095	11	24	18	7	5	20	3	15	13	22	1	26	9	16
0.3066916	24	5	7	3	11	20	13	1	15	26	18	22	16	9
0.4127666	5	9	16	7	3	1	22	26	20	13	15	24	11	18

Tabelle 6.5 Suchpriorität der Koeffizienten

Die Suchschritt kann von der statistischen Wortlänge ausgehen, z.B. bei $Q = \pm 2^{-12}$ in der Nähe eines Koeffizienten in einem Suchraum von $\pm 2 \cdot 2^{-12}$. Unter dieser Annahme wird die Untersuchung bei 5 Punkten ($\gamma - 2^{-11}$, $\gamma - 2^{-12}$, γ , $\gamma + 2^{-12}$, $\gamma + 2^{-11}$) durchgeführt.

Wählt man als Raum einen 14-dimensionalen Würfel mit der Kantenlänge $4|Q|$, so müssen 5^{14} Kombinationen untersucht werden. Offensichtlich eignet sich das Verfahren wegen des großen Rechenaufwands nicht für den Entwurf von Digitalfiltern.

in der oben angegebenen Weise muß bei jeder Kombination die Fehlerfunktion bei allen ausgezeichneten Frequenzen berechnet werden. Das Maximum

$$\varepsilon_x = \text{Max}[\varepsilon_{fT}] \quad (x = 1, 2, \dots 5) \quad (214)$$

läßt sich als eine Abweichung bei dieser Kombination bezeichnen. Das Minimum

$$\varepsilon_{\min} = \text{Max}[\varepsilon_x] \quad (x = 1, 2, \dots 5) \quad (215)$$

bestimmt, welcher Koeffizientenvektor als Ausgangslösung betrachtet wird. Bei der Ausführung gemäß der Suchpriorität wird dieses Minimum immer kleiner. Bild 6.6 zeigt, daß ein Verlauf des Minimums gemäß Suchpriorität bei $fT = 0.25$ ($\psi = 1$) liegt. Das Minimum kann man auch als Zielfunktionswert bezeichnen.

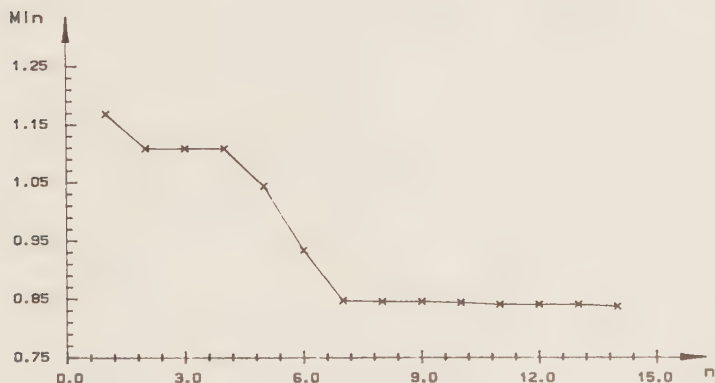


Bild 6.6 Eine Zielfunktion gemäß Suchpriorität der Koeffizienten

Nach der Ausführung bei allen ausgezeichneten Frequenzen wird das lokale Optimum (nach etwa einigen Sekunden Rechenzeit) gefunden. Wegen der Benutzung der Suchpriorität und der richtigen Auswahl des Anfangswertes kann man normalerweise mit Sicherheit immer eine Ausgangslösung finden, die die Dämpfungsanforderung erfüllt. Wenn das Verfahren mit einigen Suchschritten (z.B. $Q = \pm 2^{-12}$, $Q = \pm 2^{-11}$, $Q = \pm 2^{-10}$...) durchgeführt wird, kann man eine Ausgangslösung finden, die sogar eine Dämpfungsanforderung erfüllt, deren Wortlänge kürzer als die statistische Wortlänge ist.

Das Optimierungsverfahren wird hauptsächlich vom Optimierungszweck bestimmt. Wenn die Koeffizienten in CSD-Code dargestellt werden, sollte einerseits der Zielfunktionswert kleiner als 1 sein (zur Erfüllung der Dämpfungsanforderungen), andererseits sollte die Summe der von 0 verschiedenen Bits minimal sein (wegen der Berücksichtigung der Kostenfunktion). Wenn die Koeffizienten in Zweierkomplement-Darstellung kodiert werden, sollte der Zielfunktionswert sowohl kleiner als 1 als auch minimal sein (unter Berücksichtigung der Dämpfungsanforderungen). Hierbei beschränken wir uns in üblicher Weise auf die Zweierkomplement-Darstellung. Bild 6.7, Bild 6.8, Bild 6.9 und Bild 6.10 zeigen den Dämpfungsverlauf der zwei Beispiele vor und nach der diskreten Optimierung jeweils von PWDF, sowie von VWDF, damit die Dämpfungsanforderungen nach der Optimierung erfüllt sind (Zielfunktionswert kleiner als 1, s. Bild 6.8). Die Koeffizienten sind in Zweierkomplement-Kode dargestellt, wie später im 7. Kapitel ausgeführt wird.

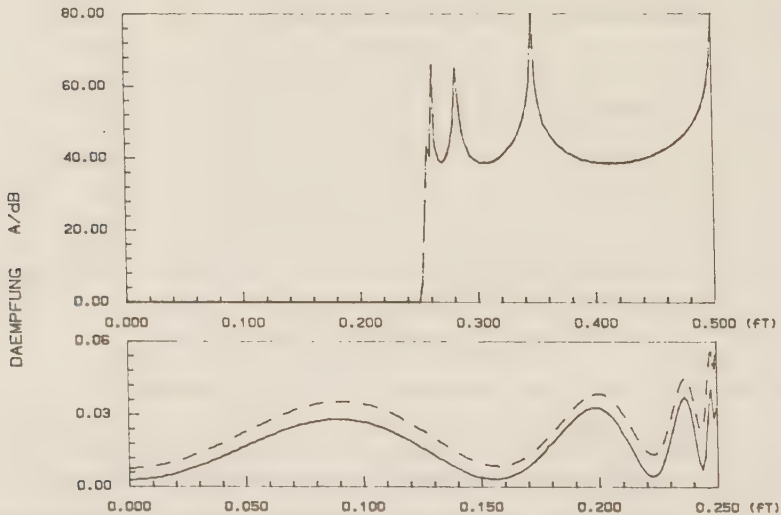


Bild 6.7 Dämpfungsverhalten vor und nach Optimierung (PWDF)

vor Optimierung: - - - - -

nach Optimierung: —————

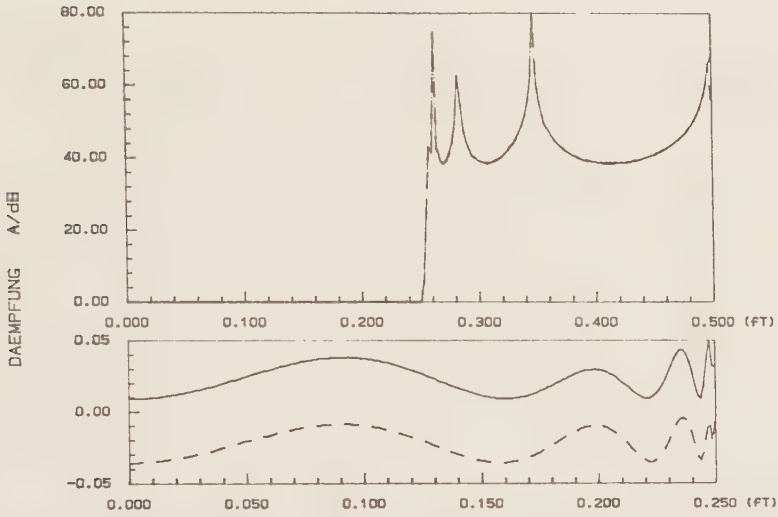


Bild 6.8 Dämpfungsverhalten vor und nach Optimierung (VWDF)
vor Optimierung: - - - - -
nach Optimierung: —————

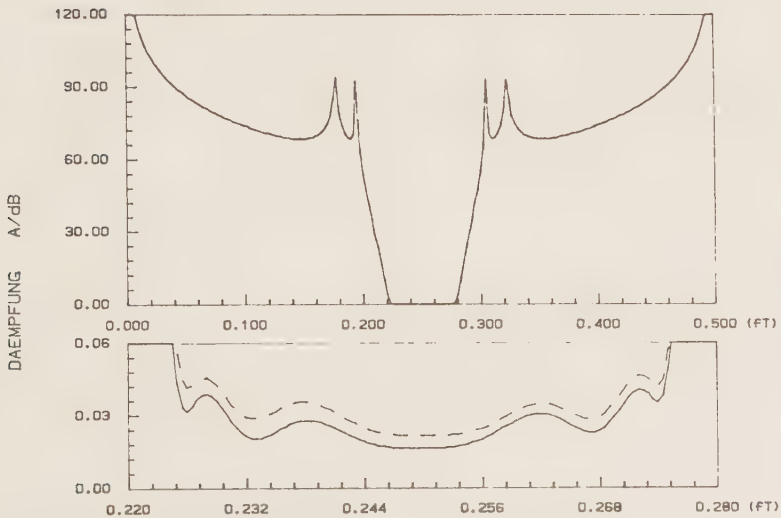


Bild 6.9 Dämpfungsverhalten vor und nach Optimierung (PWF)
vor Optimierung: - - - - -
nach Optimierung: —————

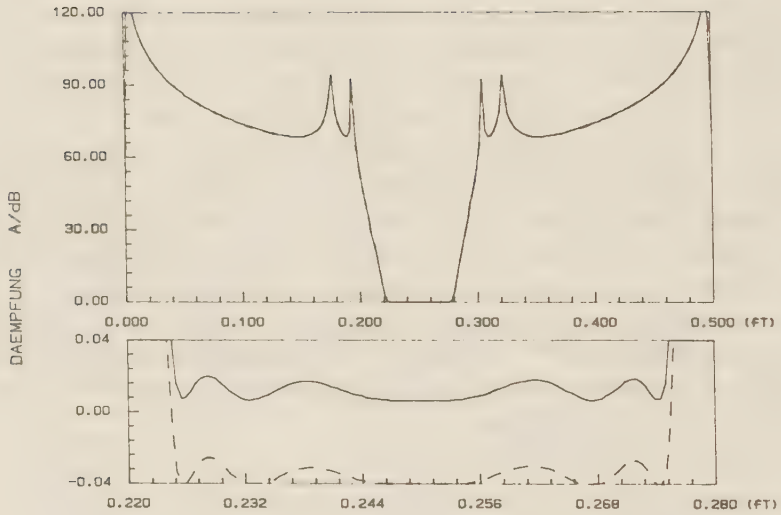


Bild 6.10 Dämpfungsverhalten vor und nach Optimierung (VWDF)

vor Optimierung: - - - - -

nach Optimierung: —————

7. Vergleich von Rauschen, Dynamik und Grenzzyklusschwingungen bei Wellendigitalfiltern, die unter Verwendung von Spannungswellen bzw. Leistungswellen hergeleitet werden

Die bisherigen Untersuchungen von Wellendigitalfiltern zeigen, daß die Wellendigitalfilter einen günstigen Dynamikbereich haben [23], [86]–[87], [91]–[94]. Das bezieht sich auf die Struktur von Wellendigitalfiltern. Im vorliegenden Kapitel beschäftigen wir uns zuerst mit der theoretischen Analyse des Rauschens von WDF. Wir gehen hier von den Zustandsdarstellungen von Digitalfiltern aus, die von Struktur-Matrix hergeleitet werden. Die Untersuchung des Rauschens von Digitalfiltern ist zumeist im Frequenzbereich durchgeführt worden. Diese Methode benötigt die Integration der vielen Übertragungsfunktionen von jedem Ausgang der Multiplizierer bis hin zum Filterausgang. Es ist normalerweise schwer, die Beziehung zwischen Rauschen und Struktur der Digitalfilter zu finden. Die Untersuchung des Rauschens von Digitalfiltern mittels der Zustandsgleichungen ist in [95]–[96], [99]–[101] behandelt worden. Wegen der Eigenschaften der Systemmatrix von PWDF läßt sich die theoretische Berechnung des Rauschens mit Hilfe von Zustandsdarstellungen leicht durchführen. Nach der theoretischen Berechnung werden die bei der Rechnersimulation gewonnenen Ergebnisse mit den theoretischen Ergebnissen verglichen. Dabei werden hauptsächlich die Ergebnisse von Wellendigitalfiltern mit Spannungswellen bzw. Leistungswellen verwendet.

7.1 Ermittlung des Signalrauschverhältnisses von Digitalfiltern

Im 2. Kapitel wurde die Aufstellung der Struktur-Matrix von Digitalfiltern vorgestellt. Die daraus resultierenden Zustandsdarstellungen stehen hier zur Ermittlung des Signalrauschverhältnisses von Digitalfiltern zur Verfügung. In diesem Kapitel bezieht sich die Untersuchung hauptsächlich auf die Wellendigitalfilter, jedoch gelten die Formeln und ihre Folgerungen auch für andere Digitalfilter.

7.1.1 Rauschquellen in Wellendigitalfiltern

Die Wellendigitalfilter bestehen grundsätzlich aus Adaptoren, die aus Multiplizierern und Addierern bestehen. Die Rauschquelle tritt erst nach einem Multiplizierer auf, wie in Bild 7.1a gezeigt ist, wenn der Quantisierungsfehler

der Multiplikation als Einwirkung eines unabhängigen weißen Rauschens betrachtet wird.

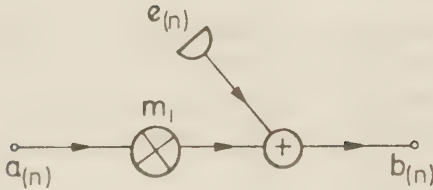


Bild 7.1a Rauschquelle nach der Multiplikation

In einem Adaptor (PWDF) treten mehrere Multiplizierer auf, der Adaptor von VWDF weist normalerweise einen Multiplizierer (Zweitor-Adaptor, Dreitor-Adaptor mit reflexionsfreiem Tor) auf. Statt die Rauschquelle hinter dem Multiplizierer anzusetzen fügt man die Rauschquelle an den Ausgängen des Adaptors ein [92] (Bild 7.1b). So muß man die Berechnung nicht von den "inneren Orten" der Adaptors her ansetzen. Zur Vermeidung von Grenzyklen findet bei Wellendigitalfiltern die Operation des "Betragsschneidens" in modifizierter Form ihre Verwendung [51], wobei die entsprechende Adaptor-Struktur angewendet wird wie im 2. Kapitel gezeigt wurde. Angenommen wird ein Quantisierungsfehler, der nach der Multiplikation auftritt und unabhängig vom Signal sowie unabhängig von anderen Quantisierungsfehlern ist (hier sind die Fehler aus anderen Rauschquellen und die Fehler zu anderen Momenten aus derselben Rauschquelle gemeint).

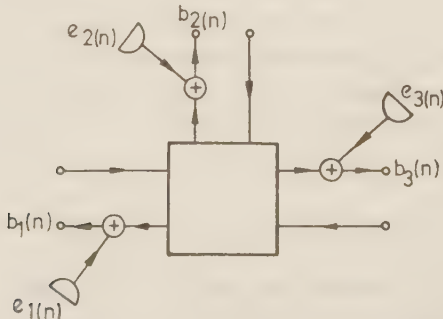


Bild 7.1b Rauschquellen an Ausgängen eines Dreitor-Adaptors

Die Berechnung des Rauschens eines Digitalfilters wird durch Rauschquellen-Vektoren mit Hilfe der Zustandsdarstellungen durchgeführt. Dem wendet sich der nächste Abschnitt zu.

7.1.2 Berechnung des Signalrauschverhältnisses von WDF

Bei früheren Veröffentlichungen wird bei der theoretischen Berechnung oder Schätzung des Signalrauschverhältnisses meist von den Teilübertragungsfunktionen im Frequenzbereich ausgegangen. Hier soll die Berechnung mit Hilfe der Zustandsdarstellungen durchgeführt werden, um den Zusammenhang zwischen Rundungsrauschen oder Betragsschneidensrauschen und den Systemeigenschaften analysieren zu können. Die Korrektur an den Toren jedes Adaptors kann man auch als ein unabhängiges weißes Rauschen an den Ausgängen der Adaptoren betrachten. Die Varianz der durch Korrektur hervorgerufenen Fehler am Ausgang des Adaptors kann man dadurch berechnen, daß sämtliche Fehler am Ausgang (hierbei ist angenommen, daß kein Überlauf innerhalb des Adaptors aufgetreten ist) in einem bestimmten Intervall, das aus den Formeln im 3. Kapitel abgeleitet werden kann, gleichverteilt annimmt. Dann kann ihre Varianz bestimmt werden, denn die Varianz der durch die Multiplizierer innerhalb des Adaptors hervorgerufenen Fehler ist bekannt (Zweier-Komplement-Abschneiden oder Rundung). Z.B. gilt im Fall, daß ein Adaptor einen Multiplizierer enthält, daß der Fehler an den Ausgängen der Adaptoren

$$e = e_1 + e_k \quad (216a)$$

$$\text{bzw.} \quad e = b_v - b_{v0} \quad (216b)$$

ist, wobei e_1 den durch Multiplizierer hervorgerufenen Fehler (hier das Zweier-Komplement-Abschneiden), e_k den durch Korrektur aufgetretenen Fehler meint. Durch Einsetzen von $Y_0 = (b_{v0})_*$, $Y = b_v$, $Y_q = b_v$ in Gl. (115c), (116) erhält man

$$(b_{v0})_* \leq b_{v0} < (b_{v0})_* + Q \quad (217a)$$

$$b_v = \begin{cases} (b_{v0})_* & \text{für } [(b_{v0})_* \geq 0] \cup [(b_{v0})_* = b_{v0}] \\ (b_{v0})_* + Q & \text{für } [(b_{v0})_* < 0] \cap [(b_{v0})_* \neq b_{v0}] \end{cases} \quad (217b)$$

$$(217c).$$

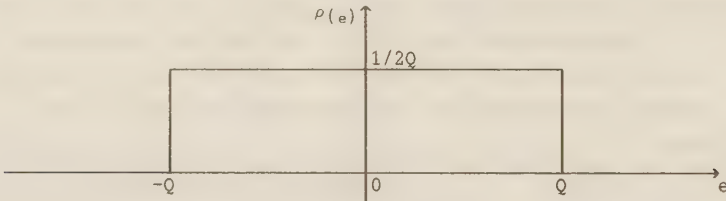
Aus (217) folgt

$$-Q \leq b_{V0} - b_V < Q ,$$

dann ergibt sich aus (216b)

$$-Q < e \leq Q ,$$

weil der Fehler e gewöhnlich im Intervall $[-Q, Q]$ als gleichverteilt angenommen werden kann.



Die Wahrscheinlichkeit ist $E(e) = 0$, ihre Varianz ist $\sigma_e^2 = E(e^2) = \frac{1}{3} Q^2$.
Aus (216a) ergibt sich

$$\sigma_e^2 = E[(e_1 + e_k)^2] - [E(e_1 + e_k)]^2 = \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_k}^2 .$$

So folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{e_k}^2 &= \sigma_e^2 - \sigma_{e_1}^2 = \frac{1}{3} Q^2 - \frac{1}{12} Q^2 \\ &= \frac{1}{4} Q^2 = 3\sigma_0^2 , \end{aligned} \quad (218)$$

wobei $\sigma_{e_1}^2 = \frac{1}{12} Q^2$ (Zweier-Komplement-Abschneiden),

$\sigma_0^2 = \frac{1}{12} Q^2$ angenommen ist.

Das Ergebnis ist identisch mit dem in [92] angegeben (dort ist die Wahrscheinlichkeit bei $0, Q$ als gleichwertig angenommen). Im Fall, daß der Adaptor einen Multiplizierer enthält, ist deshalb ihre Varianz mit $3\sigma_0^2$ bewertet. Entsprechend kann man aus (117) und (125) ableiten, daß sämtliche Fehler am 3-ten Ausgang (reflexionsfreiem Tor) des 3-Tor-Adaptors mit

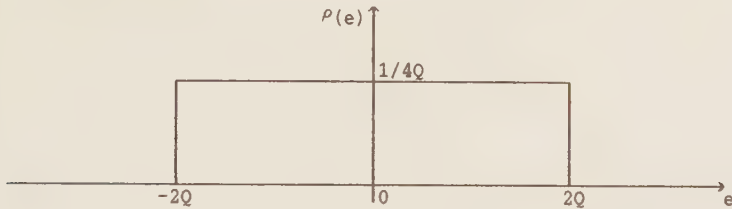
$$e = e_1 + e_2 + e_k = b_3 - b_{30} , \quad (b_{30} = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2)$$

im Bereich $-2Q < e \leq 2Q$ gleichverteilt sind, wobei

e_1 als Fehler durch den Multiplizierer γ_1 hervorgerufen,

e_2 als Fehler durch Multiplizierer γ_2 hervorgerufen und

e_k als Fehler durch die Korrektur hervorgerufen ist.



Nach der obigen ähnlichen Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_{e_k}^2 &= \sigma_e^2 - \sigma_{e_1}^2 - \sigma_{e_2}^2 = \frac{4}{3} Q^2 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) Q^2 \\ &= \frac{14}{12} Q^2 = 14\sigma_0^2\end{aligned}\quad (219).$$

Entsprechend kann man an den 1-ten und 2-ten Ausgängen eines 3-Tor-Adaptors erhalten, daß

$$\sigma_{e_k}^2 = (16 - 2\gamma_\nu^2)\sigma_0^2 \quad (0 < \gamma_\nu < 0.5) \quad (220a),$$

$$\sigma_{e_k}^2 = (36 - 2\gamma_\nu^2)\sigma_0^2 \quad (0.5 \leq \gamma_\nu < 1), \quad \nu = 1, 2 \quad (220b).$$

Auf der Basis der Struktur-Matrix kann die Zustandsdarstellung des Rauschens beschrieben werden. Die Struktur-Matrix wurde im 2. Kapitel angegeben. Sie ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{V}(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{P} \\ \mathbf{C} & \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{N}(k) \\ \mathbf{R}(k) \end{bmatrix}.$$

Unter endlicher Arithmetik kann man annehmen, daß das ganze System durch Signalquelle und Rauschquellen erregt wird, hier wird angenommen, daß keine Additionsfehler auftreten. Die Analyse unter Berücksichtigung der Signalquelle wurde schon im 2. Kapitel erörtert. Hierbei wird die Untersuchung unter

Berücksichtigung der Rauschquellen durchgeführt. Die Definitionen einiger Vektoren lassen sich dabei modifizieren. So ist die Struktur-Matrix zur Analyse des Rauschens wie folgt darstellbar (Bild 7.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_e'(k) \\ \mathbf{V}_e'(k) \\ \mathbf{Y}_e''(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{P} \\ \mathbf{C} & \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_e''(k-1) \\ \mathbf{N}_e'(k) \\ \mathbf{R}_e(k) \end{bmatrix} \quad (221)$$

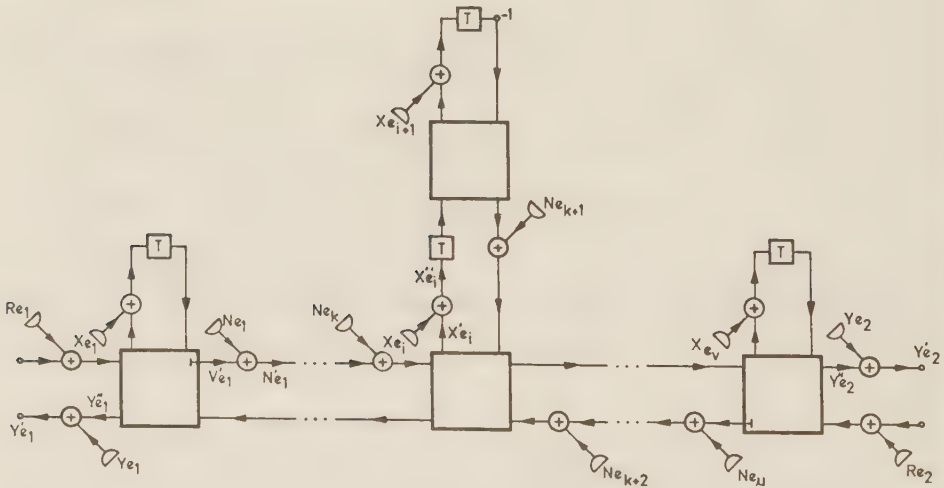


Bild 7.2 Orte der Rauschquellen

Dabei unterscheidet man in der Definition der Vektoren die Verbindungsvektoren zur Berücksichtigung der Rauschquellen in Definition von den Vektoren zur Berücksichtigung der Signalquelle. Die Verbindungsvektoren $\mathbf{V}_e'(k)$, $\mathbf{N}_e'(k)$ haben zwei Funktionen:

1. Funktion der Übertragung, wie im 2. Kapitel erläutert,
2. um Rauschquellen an ihren Knoten einsetzen zu können.

So folgt

$$\mathbf{N}'_e(k) = \mathbf{N}_e(k) + \mathbf{V}'_e(k) , \quad (222)$$

wobei $\mathbf{N}_e(k)$ der entsprechende Rauschquellen-Vektor ist.

Die Rauschquellen-Vektoren können in der folgenden Weise aufgestellt werden: Hat etwa ein 3-Tor-Paralleladaptor von VWDF 4 Rauschquellen so liegt eine innerhalb des Adaptors, deren Varianz aufgrund der Schneide-Operation mit σ_0^2 bewertet wird, während drei jeweils an den Ausgängen des Adaptors liegen, die unabhängig voneinander sind und deren Varianz mit $3\sigma_0^2$ bewertet wird.

Dann lassen sich die Rauschquellen-Vektoren wie folgt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ e_1 + e_3 \\ e_1 + e_4 \end{bmatrix}$$

wobei e_1 die Rauschquelle innerhalb des Adaptors durch Multiplikation, e_2 , e_3 und e_4 die Rauschquellen an den Ausgängen des Adaptors durch die Korrektur hervorgerufen sind.

Ebenfalls hat etwa ein 3-Tor-Adaptor von PWDF 7 Rauschquellen, so liegen vier innerhalb des Adaptors, deren Varianz aufgrund der Schneide-Operation mit σ_0^2 bewertet wird, während drei jeweils an den Ausgängen des Adaptors liegen, die unabhängig voneinander sind und deren Varianz gemäß (220) und (219) bewertet wird.

Dann lassen sich die Rauschquellen-Vektoren wie folgt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(e_1 + e_2) + e_3 + e_5 \\ \gamma_2(e_1 + e_2) + e_4 + e_6 \\ e_1 + e_2 \quad \quad + e_7 \end{bmatrix}$$

wobei e_1 , e_2 , e_3 und e_4 die Rauschquellen innerhalb des Adaptors durch Multiplikation, e_5 , e_6 und e_7 die Rauschquellen an den Ausgängen des Adaptors durch die Korrektur hervorgerufen sind.

Aus Gl.(221) und Gl. (222) ergibt sich

$$\mathbf{V}'_e(k) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{N}_e(k) + \mathbf{V}'_e(k)) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_e(k) ,$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V}'_e(k) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_e(k) ,$$

$$\mathbf{V}'_e(k) = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_e(k)) , \quad (223)$$

wobei $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$ ist.

Aus Gl.(221) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_e(k) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{N}_e(k) + \mathbf{V}'_e(k)) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_e(k) , \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + (\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{N}_e(k) + (\mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{R}_e(k) \\ &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{N}_e(k) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(k) \\ &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(k) , \end{aligned} \quad (224)$$

wobei $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ sind, weil $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$, so ist

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} + \mathbf{E}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E} .$$

Ähnlich ist

$$\mathbf{Y}''_e(k) = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{X}''_{e(k-1)} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}_e(k) , \quad (225)$$

wobei $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}$, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ sind.

Der Zustandsvektor ist definiert durch

$$\mathbf{X}''_{e(k)} = \mathbf{X}_{e(k)} + \mathbf{X}'_{e(k)} , \quad (226)$$

wobei $\mathbf{X}_{e(k)}$ der entsprechende Rauschquellen-Vektor im Moment k ist, $\mathbf{X}'_{e(k)}$ beschreibt die Akkumulation der Rauschquellen innerhalb des Systems.

Aus Gl. (224) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{e(0)} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{e(0)} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_{e(0)} , \\ \mathbf{X}'_{e(1)} &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}''_{e(0)} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{e(1)} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_{e(1)} \\ &= \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{X}'_{e(0)} + \mathbf{X}_{e(0)}) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{e(1)} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_{e(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}_e(0) + \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(0) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(1) + \\
 &\quad + \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(0) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(1) , \\
 \mathbf{X}'_e(2) &= \hat{\mathbf{A}}^2 \cdot \mathbf{X}_e(0) + \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}_e(1) + \hat{\mathbf{A}}^2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(0) + \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(1) \\
 &\quad + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(2) + \hat{\mathbf{A}}^2 \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(0) + \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(1) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(2) , \\
 &\quad \vdots \\
 \mathbf{X}'_e(k-1) &= \sum_{i=0}^{k-2} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot \mathbf{X}_e(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(i) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(i)) , \\
 &\hspace{15em} (227a) \\
 \mathbf{X}'_e(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i} \cdot \mathbf{X}_e(i) + \sum_{i=0}^k \hat{\mathbf{A}}^{k-i} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(i) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(i)) . \\
 &\hspace{15em} (227b)
 \end{aligned}$$

Aus Gl. (225) bis Gl. (227) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}''_e(k) &= \hat{\mathbf{C}} \cdot \left[\sum_{i=0}^{k-2} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot \mathbf{X}_e(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(i) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(i)) \right] \\
 &\quad + \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{X}_e(k-1) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}_e(k) \\
 &= \hat{\mathbf{C}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot \mathbf{X}_e(i) + \hat{\mathbf{C}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(i) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{R}_e(i)) \\
 &\quad + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}_e(k) . \\
 &\hspace{15em} (228)
 \end{aligned}$$

$$\text{Der Ausgangsvektor ist } \mathbf{Y}'_e(k) = \mathbf{Y}''_e(k) + \mathbf{Y}_e(k) . \hspace{5em} (229a)$$

Falls die Quantisierung der Eingangssignale nicht berücksichtigt wird, ist $\mathbf{Y}'_e$ unter Berücksichtigung der Quantisierung nach der Multiplikation

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}'_e(k) &= \hat{\mathbf{C}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot \mathbf{X}_e(i) + \hat{\mathbf{C}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbf{A}}^{k-i-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(i) + \\
 &\quad + \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}_e(k) + \mathbf{Y}_e(k)
 \end{aligned}$$

$$= \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot X_{e(i)} + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot \hat{F} \cdot N_{e(i)} + \hat{L} \cdot N_{e(k)} + Y_{e(k)} ,$$

(229b)

wobei $\hat{F} = F \cdot M^{-1}$, $\hat{L} = L \cdot M^{-1}$ sind.

Der korrekte Ausdruck ist weitaus komplizierter, da jeder einzelne der Terme in den Summen $\sum_{i=0}^{k-1}$ mit jedem anderen kombiniert werden muß; allerdings kann man eventuell die Annahmen machen, daß

$$E[X_{e(i)}] = E[N_{e(i)}] = 0 ,$$

$$E[X_{e(i)} \cdot X_{e(j)}] = 0 , \quad \text{für } i \neq j$$

$$E[N_{e(i)} \cdot N_{e(j)}] = 0 , \quad \text{für } i \neq j$$

usw. Somit erhält man

$$\begin{aligned} & E[Y'_{e(k)} \cdot Y'_{e(k)}] - E[Y'_{e(k)}] \cdot E[Y'_{e(k)}] = \\ & = \left\{ \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot Q_X \cdot \hat{A}^T(k-i-1) \cdot \hat{C}^T + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot \hat{F} \cdot Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^T(k-i-1) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \hat{C}^T + \hat{L} \cdot Q_N \cdot \hat{L}^T + Q_Y + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^T(k-i-1) \cdot \hat{C}^T + \\ & \quad \left. + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \cdot \hat{F} \cdot Q_{NX} \cdot \hat{A}^T(k-i-1) \cdot \hat{C}^T + \hat{L} \cdot Q_{NY} + Q_{YN} \cdot \hat{L}^T \right\} \cdot \sigma_0^2 , \end{aligned}$$

(230)

$$\text{wobei } Q_X \cdot \sigma_0^2 = E[X_{e(i)} \cdot X_{e(i)}^T] - E[X_{e(i)}] \cdot E[X_{e(i)}^T] , \quad (231.1)$$

$$Q_N \cdot \sigma_0^2 = E[N_{e(i)} \cdot N_{e(i)}^T] - E[N_{e(i)}] \cdot E[N_{e(i)}^T] , \quad (231.2)$$

$$Q_Y \cdot \sigma_0^2 = E[Y_{e(k)} \cdot Y_{e(k)}^T] - E[Y_{e(k)}] \cdot E[Y_{e(k)}^T] , \quad (231.3)$$

$$Q_{XN} \cdot \sigma_0^2 = E[X_{e(i)} \cdot N_{e(i)}^T] - E[X_{e(i)}] \cdot E[N_{e(i)}^T] , \quad (231.4)$$

$$Q_{NX} \cdot \sigma_0^2 = E[N_{e(i)} \cdot X_{e(i)}^T] - E[N_{e(i)}] \cdot E[X_{e(i)}^T] , \quad (231.5)$$

$$Q_{NY} \cdot \sigma_0^2 = E[N_e(k) \cdot Y_e^T(k)] - E[N_e(k)] \cdot E[Y_e^T(k)], \quad (231.6)$$

$$Q_{YN} \cdot \sigma_0^2 = E[Y_e(k) \cdot N_e^T(k)] - E[Y_e(k)] \cdot E[N_e^T(k)] \quad (231.7)$$

sind.

Die Elemente dieser sieben Matrizen lassen sich nach der Filterstruktur berechnen. Sie sind die Koeffizienten der Varianz bzw. Kovarianz der Rauschquellen der entsprechenden Adaptorsausgänge, die aus mehreren unabhängigen Rauschquellen bestehen können. Wenn die Rauschquellen zu den unterschiedlichen Adaptoren gehören, sind die entsprechenden Elemente der Matrizen null.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_e}^2(k) &= \text{tr}(E[Y_e'(k) \cdot Y_e'^T(k)] - E[Y_e'(k)] \cdot E[Y_e'^T(k)]) \\ &= \text{tr} \left\{ \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot Q_X \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{L} \cdot Q_N \cdot \hat{L}^T + \right. \\ &\quad + Q_Y + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_{NX} \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T \\ &\quad \left. + \hat{L} \cdot Q_{NY} + Q_{YN} \cdot \hat{L}^T \right\} \cdot \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (232)$$

wobei $\text{tr}[\]$ die Spur einer Matrix bedeutet,

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_e}^2 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \sigma_{Y_e}^2(k) \\ &= \text{tr} \left\{ \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot Q_X \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{L} \cdot Q_N \cdot \hat{L}^T + \right. \\ &\quad + Q_Y + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T + \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_{NX} \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}^T \\ &\quad \left. + \hat{L} \cdot Q_{NY} + Q_{YN} \cdot \hat{L}^T \right\} \cdot \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (233)$$

Normalerweise berechnet man die Varianz des Rauschens nur am 2-ten Ausgang des Digitalfilters

$$\sigma_{Y_{e2}}^2 = \text{tr} \left\{ \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot Q_X \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}_2^T + \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{Ti} \cdot \hat{C}_2^T + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{L}_2 \cdot Q_N \cdot \hat{L}_2^T + \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T + \\
 & + \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^i \cdot \hat{F} \cdot Q_{NX} \cdot \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T + \hat{L}_2 \cdot Q_{NY_2} + Q_{Y_2N} \cdot \hat{L}_2^T \cdot \sigma_0^2 + Q_{Y_{22}} \cdot \sigma_0^2 \\
 = & \operatorname{tr} \left(Q_X \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i + Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i \cdot \hat{F} + \right. \\
 & + Q_N \cdot \hat{L}_2^T \cdot \hat{L}_2 + Q_{XN} \cdot \hat{F} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i + \\
 & \left. + Q_{NX} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i \cdot \hat{F} + Q_{NY_2} \cdot \hat{L}_2 + Q_{Y_2N} \cdot \hat{L}_2^T \right) \cdot \sigma_0^2 + Q_{Y_{22}} \cdot \sigma_0^2 \\
 = & \operatorname{tr} \left(Q_X \cdot W + Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot W \cdot \hat{F} + Q_N \cdot \hat{L}_2^T \cdot \hat{L}_2 + Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot W + \right. \\
 & \left. + Q_{NX} \cdot W \cdot \hat{F} + Q_{NY_2} \cdot \hat{L}_2 + Q_{Y_2N} \cdot \hat{L}_2^T \right) \cdot \sigma_0^2 + Q_{Y_{22}} \cdot \sigma_0^2, \quad (234)
 \end{aligned}$$

$$\text{wobei } W = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i. \quad (235)$$

Weil $W^T = W$, $\operatorname{tr}[F] = \operatorname{tr}[F^T]$, F eine quadratische Matrix ist, so ergeben sich

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}[Q_{NX} \cdot W \cdot \hat{F}] &= \operatorname{tr}[\hat{F}^T \cdot W^T \cdot Q_{NX}^T] = \operatorname{tr}[\hat{F}^T \cdot W \cdot Q_{XN}] = \operatorname{tr}[Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot W], \\
 \operatorname{tr}[Q_{NY_2} \cdot \hat{L}_2] &= \operatorname{tr}[\hat{L}_2^T \cdot Q_{NY_2}^T] = \operatorname{tr}[\hat{L}_2^T \cdot Q_{Y_2N}] = \operatorname{tr}[Q_{Y_2N} \cdot \hat{L}_2^T].
 \end{aligned}$$

Daher kann man die Gl. (234) in der Form

$$\sigma_{Y_{e_2}}^2 = \operatorname{tr} \left\{ Q_X \cdot W + Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot W \cdot \hat{F} + Q_N \cdot \hat{L}_2^T \cdot \hat{L}_2 + 2Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot W + 2Q_{Y_2N} \cdot \hat{L}_2^T \right\} \cdot \sigma_0^2 + Q_{Y_{22}} \cdot \sigma_0^2 \quad (236a)$$

schreiben. In einem System mit zwei Ausgängen können die Matrizen $\hat{C}$, $\hat{L}$, Q_Y , Q_{YN} wie folgt geschrieben werden

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \end{bmatrix},$$

$$Q_Y = \begin{bmatrix} Q_{Y_{11}} & Q_{Y_{12}} \\ Q_{Y_{21}} & Q_{Y_{22}} \end{bmatrix},$$

$$Q_{YN} = \begin{bmatrix} Q_{Y_{1N}} \\ Q_{Y_{2N}} \end{bmatrix}.$$

Wenn das System einen Ausgang hat, wird

$$\sigma_{Y_e}^2 = \text{tr} \left\{ Q_X \cdot W + Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot W \cdot \hat{F} + Q_N \cdot \hat{L}^T \cdot \hat{L} + 2Q_{XN} \cdot \hat{F}^T \cdot W + 2Q_{YN} \cdot \hat{L}^T \right\} \cdot \sigma_0^2 + Q_Y \cdot \sigma_0^2 \quad (236b)$$

Aus Gl. (235) ergibt sich

$$W = \hat{A}^T \cdot W \cdot \hat{A} + \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2, \quad (237)$$

eine Matrix, die symmetrisch und auch positiv definit Matrix ist.

Weil die Matrix $\hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2$ eine positiv definit Matrix ist, hat Gl. (237) eine

Lösung [90]. Gl. (237) gehört zu einer Ljapunov-Matrix-Gleichung.

Aus Gl. (237) folgt

$$\begin{aligned} W - \hat{A}^T \cdot W \cdot \hat{A} &= \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2, \\ W &= \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 + \hat{A}^T \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A} + (\hat{A}^T)^2 \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot (\hat{A})^2 + \dots \end{aligned} \quad (238)$$

Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{A}^k = 0$, konvergiert die Reiheentwicklung in Gl. (238). Die Systemmatrix $\hat{A}$ von Wellendigitalfiltern weist diese Eigenschaft auf.

Die Arithmetik zum Lösen der Gl. (238) kann in einigen Schritten durchgeführt werden (nesting procedure) [90], [97], [98].

$$\begin{aligned} T_0 &= \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2, \\ T_1 &= T_0 + \hat{A}^T \cdot T_0 \cdot \hat{A}, \\ T_2 &= T_1 + (\hat{A}^T)^2 \cdot T_1 \cdot (\hat{A})^2, \\ T_3 &= T_2 + (\hat{A}^T)^4 \cdot T_2 \cdot (\hat{A})^4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$T_{k+1} = T_k + (\hat{A}^T)^{2k} \cdot T_k \cdot (\hat{A})^{2k}, \quad (239a)$$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 + \hat{A}^T \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A} + (\hat{A}^T)^2 \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot (\hat{A})^2 + \dots + (\hat{A}^T)^{2k-1} \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^{2k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{2k-1} (\hat{A}^T)^i \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}^i. \end{aligned} \quad (239b)$$

Wenn die Systemmatrix unterschiedliche charakteristische Wurzeln hat, kann man wie folgt umformen

$$\Gamma^{-1} \cdot \hat{A} \cdot \Gamma = \Lambda = \text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu], \quad (240)$$

wobei Γ eine Matrix ist, die aus den Eigenvektoren besteht.

So folgt

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^{-1}, & \hat{A}^T &= (\Gamma^{-1})^T \cdot \Lambda \cdot \Gamma^T, \\ (\hat{A}^T)^r \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot (\hat{A})^r &= (\Gamma^{-1})^T \cdot \Lambda^r \cdot \Gamma^T \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \Gamma \cdot \Lambda^r \cdot \Gamma^{-1}. \end{aligned} \quad (241)$$

Durch Einsetzen von $\Gamma^T \cdot \hat{C}_2^T \cdot \hat{C}_2 \cdot \Gamma = P \equiv (\rho_{ij})$ in Gl. (241), dann in (238) wird

$$W = (\Gamma^{-1})^T (P + \Lambda \cdot P \cdot \Lambda + \Lambda^2 \cdot P \cdot \Lambda^2 + \dots) \cdot \Gamma^{-1}. \quad (242)$$

Weil $(\Lambda^r \cdot P \cdot \Lambda^r)_{ij} = \rho_{ij} \cdot \lambda_i^r \cdot \lambda_j^r$, folgt aus Gl. (242)

$$W = (\Gamma^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\rho_{11}}{1 - \lambda_1^2} & \frac{\rho_{12}}{1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2} & \dots & \frac{\rho_{1\nu}}{1 - \lambda_1 \cdot \lambda_\nu} \\ \frac{\rho_{21}}{1 - \lambda_2 \cdot \lambda_1} & \frac{\rho_{22}}{1 - \lambda_2^2} & \dots & \frac{\rho_{2\nu}}{1 - \lambda_2 \cdot \lambda_\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho_{\nu 1}}{1 - \lambda_\nu \cdot \lambda_1} & \frac{\rho_{\nu 2}}{1 - \lambda_\nu \cdot \lambda_2} & \dots & \frac{\rho_{\nu \nu}}{1 - \lambda_\nu^2} \end{bmatrix} \cdot \Gamma^{-1}, \quad (243)$$

wenn $|\lambda_i \cdot \lambda_j| = |\lambda_i| \cdot |\lambda_j| < 1$ ist.

Um diese allgemeine Berechnungsmethode zu verdeutlichen, betrachten wir ein Beispiel, das aus [49] genommen wurde.

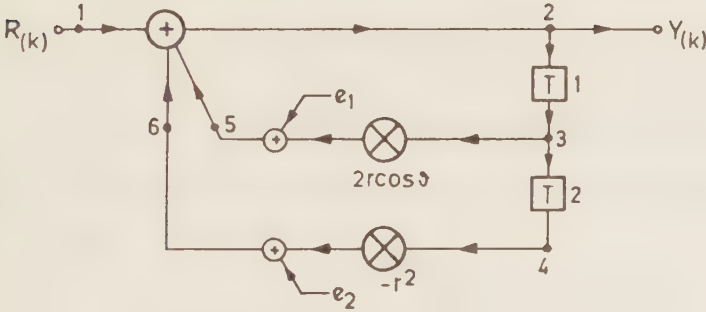


Bild 7.3 ein Digitalfilter zweiter Ordnung

Die zur Struktur-Matrix-Darstellung benötigten Vektoren sind:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{(k)}] &= [K_2, K_3]^T, & [\mathbf{X}_{(k-1)}] &= [K_3, K_4]^T, \\ [\mathbf{V}_{(k)}] &= [K_5, K_6]^T, & [\mathbf{W}_{(k)}] &= [K_5, K_6]^T, \\ [\mathbf{Y}_{(k)}] &= [K_2], & [\mathbf{R}_{(k)}] &= [K_1]. \end{aligned}$$

Entsprechend ist die Struktur-Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{B} & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 2r\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{L} & \mathbf{D} & & & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{E} \\ \mathbf{P} \end{array} \quad (244)$$

Dann erhält man

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{weil } \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

So folgt

$$\hat{F} = F \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{L} = L \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die zur Zustandsdarstellung benötigten Matrizen sind

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A + F \cdot M^{-1} \cdot G \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2r \cos \theta & 0 \\ 1 & -r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2r \cos \theta & -r^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= C + L \cdot M^{-1} \cdot G \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2r \cos \theta & 0 \\ 1 & -r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2r \cos \theta & -r^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= B + F \cdot M^{-1} \cdot P \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D} &= D + L \cdot M^{-1} \cdot P \\ &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= [1] .$$

Das System der Zustandsgleichungen wird wie folgt dargestellt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \hline \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r\cos\theta & -r^2 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline 2r\cos\theta & -r^2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \hline \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} . \quad (245)$$

Die entsprechende Übertragungsfunktion dieses Systems ist

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{\mathbf{C}} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} \\ &= [2r\cos\theta \quad -r^2] \cdot \begin{bmatrix} z - 2r\cos\theta & r^2 \\ -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}} . \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung wird

$$|z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}| = 0 ,$$

$$z^2 - 2r\cos\theta z + r^2 = 0 .$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$z_1 = re^{j\theta} , \quad z_2 = re^{-j\theta} ,$$

wobei für ein stabiles System $|r| < 1$ sein muß.

Weiterhin erhält man die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{bmatrix} re^{j\theta} \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} re^{-j\theta} \\ 1 \end{bmatrix}$$

jeweils zu den Eigenwerten $z_1 = re^{j\theta} , \quad z_2 = re^{-j\theta} .$

Eine Matrix, die aus Eigenvektoren besteht, ist in der Form

$$r = \begin{bmatrix} re^{j\theta} & re^{-j\theta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dargestellt, und die Inverse der Matrix r wird

$$r^{-1} = \frac{1}{r(e^{j\theta} - e^{-j\theta})} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -re^{-j\theta} \\ -1 & re^{j\theta} \end{bmatrix}.$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} p &= r^T \cdot \hat{C}^T \cdot \hat{C} \cdot r \\ &= \begin{bmatrix} re^{j\theta} & 1 \\ re^{-j\theta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2r \cos \theta \\ -r^2 \end{bmatrix} \cdot [2r \cos \theta \quad -r^2] \cdot \begin{bmatrix} re^{j\theta} & re^{-j\theta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= r^4 \begin{bmatrix} e^{4j\theta} & 1 \\ 1 & e^{-4j\theta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich die zur Berechnung der Matrix W benötigte Matrix (s. Gl. (243))

$$\begin{aligned} p' &= \begin{bmatrix} \frac{\rho_{11}}{1 - z_1^2} & \frac{\rho_{12}}{1 - z_1 z_2} \\ \frac{\rho_{21}}{1 - z_2 z_1} & \frac{\rho_{22}}{1 - z_2^2} \end{bmatrix} \\ &= r^4 \begin{bmatrix} \frac{e^{4j\theta}}{1 - r^2 e^{2j\theta}} & \frac{1}{1 - r^2} \\ \frac{1}{1 - r^2} & \frac{e^{-4j\theta}}{1 - r^2 e^{-2j\theta}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gemäß Gl. (243) ist

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = (\mathbf{r}^{-1})^T \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{r}^{-1} \\
 &= \frac{1}{r(e^{j\theta} - e^{-j\theta})} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -re^{-j\theta} & re^{j\theta} \end{bmatrix} \cdot r^4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^{4j\theta}}{1 - r^2 e^{2j\theta}} & \frac{1}{1 - r^2} \\ \frac{1}{1 - r^2} & \frac{e^{-4j\theta}}{1 - r^2 e^{-2j\theta}} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{r(e^{j\theta} - e^{-j\theta})} \begin{bmatrix} 1 & -re^{-j\theta} \\ -1 & re^{j\theta} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{r^2}{(1 - r^2 e^{2j\theta} - r^2 e^{-2j\theta} + r^4)(1 - r^2)} \cdot \begin{bmatrix} r^2(1 + r^2) + (1 - r^2)(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2 & -r(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ -r(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) & r^2(1 + r^2) \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Rauschquellen-Vektoren sind (s. Bild 7.3 und (244))

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_e = [0].$$

Daher sind

$$\begin{aligned}
 Q_N \cdot \sigma_0^2 &= \mathbf{E}[\mathbf{N}_e \cdot \mathbf{N}_e^T] - \mathbf{E}[\mathbf{N}_e] \cdot \mathbf{E}[\mathbf{N}_e^T] \\
 &= \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \cdot [e_1 \ e_2] \right\} - \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{E}[e_1 \ e_2], \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_{e_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sigma_0^2
 \end{aligned}$$

$$Q_X \cdot \sigma_0^2 = 0,$$

$$Q_Y \cdot \sigma_0^2 = 0,$$

$$Q_{XN} \cdot \sigma_0^2 = E[X_e \cdot N_e^T] - E[X_e] \cdot E[N_e^T]$$

$$= E \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [e_1 \ e_2] \right\} - E \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot E[e_1 \ e_2],$$

$$= 0,$$

$$Q_{YN} = E[Y_e \cdot N_e^T] - E[Y_e] \cdot E[N_e^T]$$

$$= E\{0 \cdot [e_1 \ e_2]\} - E[0] \cdot E[e_1 \ e_2] = 0.$$

Gemäß Gl. (236b) erhält man

$$\sigma_{V_e}^2 = \text{tr} [Q_N \cdot \hat{F}^T \cdot W \cdot \hat{F} + Q_N \cdot \hat{L}^T \cdot \hat{L}] \cdot \sigma_0^2$$

$$= \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot W \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 1] \right\} \cdot \sigma_0^2$$

$$= \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{11} \\ w_{11} & w_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \sigma_0^2$$

$$= 2(w_{11} + 1) \cdot \sigma_0^2$$

$$= 2 \left(\frac{r^2(r^2(1+r^2) + (1-r^2)(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2)}{(1-r^2e^{2j\theta} - r^2e^{-2j\theta} + r^4)(1-r^2)} + 1 \right) \cdot \sigma_0^2$$

$$= 2\sigma_0^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta},$$

wobei $\sigma_0^2 = \frac{2^{-2b}}{12}$ angenommen ist.

Das Ergebnis stimmt mit dem in [49] überein.

Als nächstes betrachten wir die Zustandsdarstellung (245). Dabei kann die Matrix

$$\begin{array}{c} \text{A} \left[\begin{array}{ccc|c} 2r \cos \theta & -r^2 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ \hline 2r \cos \theta & -r^2 & 1 & \end{array} \right] \text{B} \\ \text{C} \left[\begin{array}{ccc|c} 2r \cos \theta & -r^2 & 1 & \end{array} \right] \text{D} \end{array}$$

auch als eine Struktur-Matrix betrachtet werden, wobei $F = 0$, $G = 0$, $E = 0$, $P = 0$, $L = 0$ sind.

Die zugehörigen Rauschquellen-Vektoren oder Rauschquellen-Matrix sind

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_e = [e_1 + e_2], \quad \mathbf{N}_e = 0.$$

Daher sind

$$\begin{aligned} Q_X \cdot \sigma_0^2 &= E[\mathbf{X}_e \cdot \mathbf{X}_e^T] - E[\mathbf{X}_e] \cdot E[\mathbf{X}_e^T] \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [e_1 + e_2 \ 0] \right\} - E \left\{ \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot E[e_1 + e_2 \ 0] , \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sigma_0^2 \end{aligned}$$

$$Q_N \cdot \sigma_0^2 = 0, \quad Q_{XN} \cdot \sigma_0^2 = 0, \quad Q_{YN} \cdot \sigma_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} Q_Y \cdot \sigma_0^2 &= E[\mathbf{Y}_e \cdot \mathbf{Y}_e^T] - E[\mathbf{Y}_e] \cdot E[\mathbf{Y}_e^T] \\ &= E \{ [e_1 + e_2] \cdot [e_1 + e_2] \} - E[e_1 + e_2] \cdot E[e_1 + e_2] , \\ &= \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2 = 2\sigma_0^2 . \end{aligned}$$

Gemäß Gl. (236b) erhält man

$$\sigma_{\hat{Y}_e}^2 = (\text{tr} [Q_X \cdot W] + Q_Y) \cdot \sigma_0^2$$

$$= (\text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \right\} + 2) \cdot \sigma_0^2$$

$$= 2(w_{11} + 1) \cdot \sigma_0^2 .$$

Das Ergebnis ist wiederum identisch mit dem obigen Ergebnis.

Die Formel (236) gilt deshalb sowohl für Wellendigitalfilter, als auch für andere Digitalfilter, wobei sie besonders nützlich für komplizierte oder multidimensionale Digitalfilter ist. Die Übertragungsfunktionen von jeder Rauschquelle bis hin zum Ausgang des Digitalfilters brauchen nicht explizit berechnet zu werden. Diese Berechnungsmethode eignet sich auch hervorragend für eine rechnergestützte Bearbeitung.

Wenn die Abzweig-Wellendigitalfilter in kanonischer Form realisiert werden, sind die Beträge aller charakteristischen Wurzeln nicht größer als 1, wobei sich die Wurzeln voneinander unterscheiden. Deshalb kann man $\mathbf{W}$ mit Hilfe der Gl. (243) berechnen. Wenn die Abzweig-Wellendigitalfilter in nicht kanonischer Form realisiert werden, sind einige charakteristische Wurzeln der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ keine echten charakteristischen Wurzeln des Systems, sondern sie sind gleich ± 1 . Bei einer Nachbildung der Kreuzschaltung, die in nicht kanonischer Form realisiert wird, hat das System doppelte gleiche Eigenwerte, also nicht unterschiedliche. In diesen zwei Fällen wird die Berechnung von $\mathbf{W}$ gemäß Gl. (243) nicht konvergieren. Aber weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{A}}^k = \mathbf{0} , \quad \text{d.h.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{A}}^k| \rightarrow 0 ,$$

[97]. Die Berechnung von $\mathbf{W}$ kann nach Gl. (239) durchgeführt werden.

Die Varianz des gesamten Rauschens am Filterausgang läßt sich nach Gl. (236) berechnen. Das Signalrauschverhältnis der Filter ist wie üblich definiert durch

$$\text{SNR} = 10 \log(\sigma_{\mathbf{y}_2}^2 / \sigma_{\mathbf{v}_e}^2) \quad (\text{dB}) , \quad (246a)$$

wobei $\sigma_{\mathbf{y}_2}^2$ die Varianz des Ausgangssignals ist,

$$\text{bzw.} \quad \text{SNR} = 10 \log(\sigma_{\mathbf{y}}^2 / \sigma_{\mathbf{v}_e}^2) \quad (\text{dB}) , \quad (246b)$$

wenn das System einen Eingang und einen Ausgang hat.

Die Varianz σ_0^2 bei der Betragschneide-Operation ist $\frac{q^2}{3}$, wobei q die Quantisierungsstufe des Signals angibt. Das Maximum des SNR heißt Dynamikbereich. Weil eine Übertragungsfunktion beim Entwurf von Digitalfiltern mit verschiedenen Strukturen realisiert werden kann, könnte die Varianz des Ausgangssignals gleichwertig in den verschiedenen Digitalfiltern sein. Deshalb hängt der Dynamikbereich von der Struktur der Digitalfilter ab, wenn das Eingangssignal dasselbe ist.

Das Ausgangssignal $Y_2(k)$ läßt sich wie folgt berechnen

$$Y_2(k) = \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot \hat{B}_1 \cdot R_1(i) + \hat{D}_{21} \cdot R_1(k) , \quad (247a)$$

$$\text{wobei} \quad R(k) = \begin{bmatrix} R_1(k) \\ R_2(k) \end{bmatrix} , \quad \hat{B} = [\hat{B}_1 \quad \hat{B}_2] ,$$

$$X(0) = [0] , \quad R_2(k) = 0 \text{ sind.}$$

$$\text{bzw.} \quad Y(k) = \hat{C} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot \hat{B} \cdot R(i) + \hat{D} \cdot R(k) . \quad (247b)$$

Für den Sonderfall eines sinusförmigen Signals ist

$$\sigma_{Y_2}^2 = \hat{X}^2 / 2 \quad (248a)$$

$$\text{bzw.} \quad \sigma_Y^2 = \hat{X}^2 / 2 , \quad (248b)$$

wobei $\hat{X}$ der Scheitelwert ist.

Das maximale Signalrauschverhältnis der Digitalfilter ist

$$SNR = 10 \log(\hat{X}^2 / 2\sigma_{Y_{e_2}}^2) \quad (\text{dB}) , \quad (249a)$$

$$\text{bzw.} \quad SNR = 10 \log(\hat{X}^2 / 2\sigma_{Y_e}^2) \quad (\text{dB}) . \quad (249b)$$

Wenn das Eingangssignal ein weißes Rauschsignal ist, ist die Varianz von $Y_2(k)$

$$\sigma_{Y_2(k)}^2 = \text{tr} \left\{ \hat{C}_2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^i \cdot \hat{B}_1 \cdot \hat{B}_1^T \cdot \hat{A}^{T i} \cdot \hat{C}_2^T + D_{21}^2 \right\} \cdot \sigma_R^2 . \quad (250)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Y_2}^2 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \sigma_{Y_2}^2(k) \\
 &= \text{tr} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{A}}^i \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1^T \cdot \hat{\mathbf{A}}^{T i} \cdot \hat{\mathbf{C}}_2^T + \mathbf{D}_{21}^2 \right\} \cdot \sigma_R^2 \\
 &= \text{tr} \left\{ \hat{\mathbf{B}}_1^T \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{A}}^{T i} \cdot \hat{\mathbf{C}}_2^T \cdot \hat{\mathbf{C}}_2 \cdot \hat{\mathbf{A}}^i \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}_{21}^2 \right\} \cdot \sigma_R^2 \\
 &= \text{tr} \left\{ \hat{\mathbf{B}}_1^T \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}_{21}^2 \right\} \cdot \sigma_R^2, \tag{251a}
 \end{aligned}$$

$$\text{bzw.} \quad \sigma_Y^2 = \text{tr} \left\{ \hat{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{D}^2 \right\} \cdot \sigma_R^2, \tag{251b}$$

wobei σ_R^2 die Varianz des Eingangssignals ist.

Falls $R_{\max}$ das maximale zugelassene Eingangssignal ist, erhält man

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{3} R_{\max}^2.$$

Im oben erwähnten Beispiel ist die Varianz des Eingangssignals, das als weißes Rauschen angenommen wird,

$$\begin{aligned}
 \sigma_Y^2 &= (\text{tr} [\hat{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{B}}] + \mathbf{D}) \cdot \sigma_R^2 \\
 &= (\text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + 1) \cdot \sigma_R^2 \\
 &= (w_{11} + 1) \cdot \sigma_R^2 = \frac{1}{3} (w_{11} + 1) \cdot R_{\max}^2.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt das maximale Signalrauschverhältnis dieses Digitalfilters zweiter Ordnung als

$$\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_{Y_e}^2} = \frac{\frac{1}{3} (w_{11} + 1) \cdot R_{\max}^2}{2 \cdot \frac{2^{-2b}}{12} (w_{11} + 1)} = 2 \cdot 2^{2b} \cdot R_{\max}^2,$$

wobei $\sigma_{Y_e}^2$ im oben erwähnten Beispiel ermittelt wurde.

7.2 Bestimmung der Skalierungsfaktoren

Um die Dynamikeigenschaften und die Aussteuerbarkeit von Digitalfiltern zu verbessern, findet die Skalierungstechnik bei dem Entwurf der Digitalfilter weitere Verwendung. Bei VWDF wurde die Skalierungstechnik häufig wie folgt benutzt (Bild 7.4):

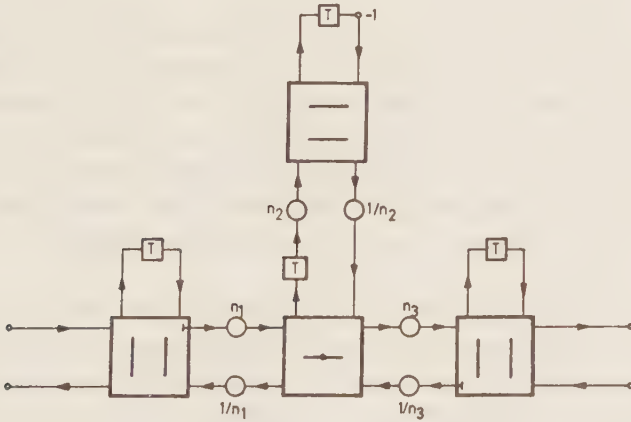


Bild 7.4 Skalierung von VWDF

In vielen Veröffentlichungen wurde gezeigt, daß eine geeignete innere Transformation die Dynamikeigenschaften von VWDF verbessern kann. Bei PWDF ist die innere Transformation bereits im 4. Kapitel angegeben worden.

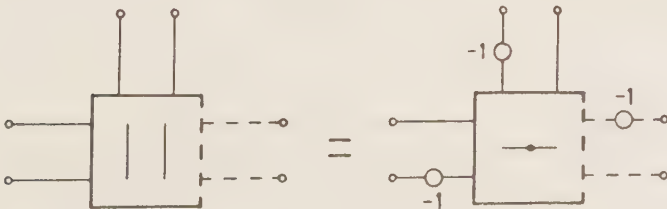


Bild 7.5 Transposition von Adaptoren in PWDF

Die Bestimmung der Skalierungsfaktoren mit Hilfe des Simulationsprogramms

wurde in [23], [92] vorgestellt. In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Methode eingeführt, die von der Zustandsdarstellung abgeleitet ist.

Gemäß der l_2 -Skalierungsmethode [96], [99], [100] sollte durch Transformation die Impulsantwort zwischen Filtereingang und Multiplizierer die Bedingung

$$\|f_{(k)}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_{(k)}|^2 = 1 \quad (252)$$

erfüllen. Zu diesem Zweck kann man bei der Aufstellung der Struktur-Matrix die Vektoren $X_{(k-1)}$, $V_{(k)}$ bzw. $N_{(k)}$ so konstruieren, daß sie diejenigen Knotensignale enthalten, die in einen Multiplizierer hineinführen. Betrachten wir Bild 2.25 bzw. Bild 2.26, so können wir die Position der Multiplizierer von PWDF erkennen. Eine Hälfte der Multiplizierer von PWDF befindet sich direkt an den Eingängen der Adaptoren, die zweite Hälfte der Multiplizierer liegt weit entfernt von den Eingängen der Adaptoren. Damit ist das Signal

$$a_0 = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \dots + \gamma_n \cdot a_n$$

das Eingangssignal der zweiten Hälfte der Multiplizierer. Für VWDF liegen alle Multiplizierer weit von den Eingängen der Adaptoren entfernt (s. Bilder 2.21, 2.23 bzw. Bilder 2.22, 2.24). Gemäß der Definition der Vektoren der Struktur-Matrix gehören die Eingangssignale der Multiplizierer von VWDF und das Signal a_0 von PWDF zu den Knotensignalen des Vektors $N_{(k)}$. Man braucht jedoch nicht an den "inneren Orten" der Adaptoren, an denen, die Multiplikation ausgeführt wird, Skalierer einzusetzen. Man kann sie an den Eingängen und Ausgängen der Adaptoren einbauen. Man versteht dabei unter reziproken Multiplizierern an den Eingängen und Ausgängen der Adaptoren einerseits die Transposition von Adaptoren zu Adaptoren entgegengesetzten Typs, andererseits die Äquivalenz von Adaptoren, wie die Bild 7.6 und 7.7 zeigen.

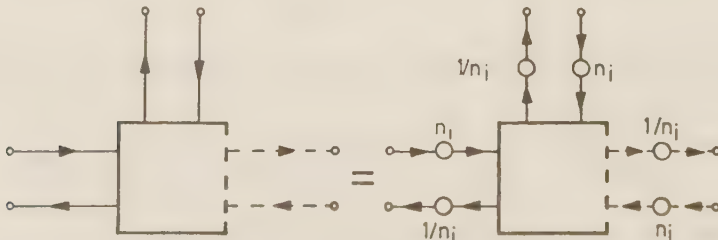


Bild 7.6 Äquivalenz von Adaptoren

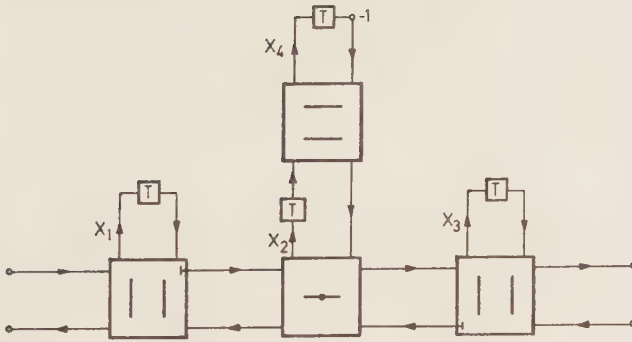


Bild 7.7a originale Struktur

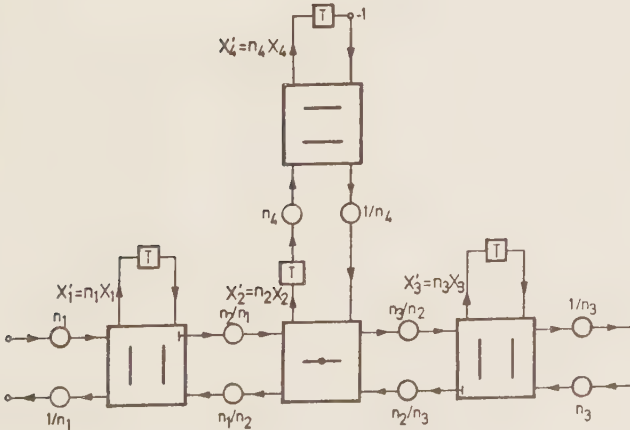


Bild 7.7b Äquivalenz von Bild 7.7a

Bild 7.7b ist dabei aus Bild 7.7a durch die Transformation

$$\mathbf{X}'_{(k)} = \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{X}_{(k)} \quad , \quad \mathbf{V}'_{(k)} = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{V}_{(k)} \quad , \quad \mathbf{N}'_{(k)} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{N}_{(k)}$$

hervorgegangen, wobei $\mathbf{T}_v = \mathbf{T}_N$ ist und $\mathbf{X}_{(k)}$, $\mathbf{V}_{(k)}$, $\mathbf{N}_{(k)}$ vor der Transformation, $\mathbf{X}'_{(k)}$, $\mathbf{V}'_{(k)}$, $\mathbf{N}'_{(k)}$ nach der Transformation sind.

Dann steht die Struktur-Matrix nach der Transformation im Zusammenhang mit der vor der Transformation. Es gilt dabei:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_x^{-1}, & \mathbf{F}' &= \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_N^{-1}, & \mathbf{B}' &= \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{B}, \\ \mathbf{G}' &= \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_x^{-1}, & \mathbf{E}' &= \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}_N^{-1}, & \mathbf{P}' &= \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_x^{-1}, & \mathbf{L}' &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}_N^{-1}, & \mathbf{D}' &= \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (253)$$

wobei $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{L}$ die Größen vor der Transformation und $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}', \mathbf{E}', \mathbf{F}', \mathbf{G}', \mathbf{P}', \mathbf{L}'$ die Größen nach der Transformation darstellen. So folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'^{-1} &= \mathbf{I} + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{T}_N^{-1} + \dots + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{E}^n \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \\ &= \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{T}_N^{-1}. \end{aligned}$$

Die Matrizen zur Zustandsdarstellung werden

$$\hat{\mathbf{A}}' = \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_x^{-1} + \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_x^{-1} = \mathbf{T}_x \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{T}_x^{-1}, \quad (254a)$$

$$\hat{\mathbf{B}}' = \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{B} + \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{P} = \mathbf{T}_x \cdot \hat{\mathbf{B}}, \quad (254b)$$

$$\hat{\mathbf{C}}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_x^{-1} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_x^{-1} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{T}_x^{-1}, \quad (254c)$$

$$\hat{\mathbf{D}}' = \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{T}_N^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{P} = \hat{\mathbf{D}}. \quad (254d)$$

Aus (254) ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\mathbf{H}'(z) = \hat{\mathbf{C}}' \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}')^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}}' = \hat{\mathbf{C}} \cdot (z \cdot \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{H}(z),$$

die sich nach der Transformation nicht ändert.

Weil die Vektoren $\mathbf{X}_{(k-1)}$, $\mathbf{N}_{(k)}$ die Knotensignale enthalten, die zu den Multiplizierern führen, sollte man bei Bestimmung der Skalierung zuerst die Impulsantwort vom Eingang bis zu diesen Knoten berechnen.

Seien $\mathbf{f}_{x(j)}$, $\mathbf{f}_{x'(j)}$ die Impulsantwort-Vektoren jeweils vom Eingang bis zu den zu den Vektoren $\mathbf{X}_{(k)}$, $\mathbf{X}_{(k-1)}$ gehörigen Knoten, $\mathbf{f}_{v(j)}$, $\mathbf{f}_{N(j)}$ die Impulsantwort-Vektoren jeweils vom Eingang bis zu den zu den Vektoren $\mathbf{V}_{(k)}$, $\mathbf{N}_{(k)}$ gehörigen Knoten, kann man $\mathbf{f}_{x(j)}$, $\mathbf{f}_{v(j)}$ anstellen von $\mathbf{f}_{x'(j)}$, $\mathbf{f}_{N(j)}$

ermitteln, weil

$$f_v(j) = f_N(j), \quad f_x(j) = f_{x'}(j+1) \text{ ist.}$$

Bei einem Eingangssignal $R(k)$ bezeichnet man den Zustandsvektor sowohl mit

$$X(k) = \sum_{j=0}^k f_x(j) \cdot R_1(k-j), \quad (255a)$$

$$\text{als auch mit } X(k) = \sum_{j=0}^k \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot R_1(k-j), \quad (255b)$$

$$\text{wobei } \hat{B} = [\hat{B}_1 \quad \hat{B}_2], \quad R = [R_1 \quad R_2]^T, \quad R_2 \equiv 0.$$

Denn ein Wellendigitalfilter weist normalerweise zwei Eingänge und zwei Ausgänge auf. Aus Gl. (254) folgt

$$f_x(j) = \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1, \quad (256)$$

und

$$\begin{aligned} f_x(j) \cdot f_x^T(j) &= \begin{bmatrix} f_{x_1}^u(j) & f_{x_1}(j) \cdot f_{x_2}(j) & \cdots \\ f_{x_1}(j) \cdot f_{x_2}(j) & f_{x_2}^2(j) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot (\hat{A}^j \cdot \hat{B}_1)^T. \end{aligned}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{j=0}^{\infty} f_x(j) \cdot f_x^T(j) = \begin{bmatrix} \|f_{x_1}(j)\|_2^2 & X \\ & \|f_{x_2}(j)\|_2^2 \\ X & & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot (\hat{A}^j \cdot \hat{B}_1)^T \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot \hat{B}_1^T \cdot \hat{A}^{Tj} \quad (257a) \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad K_{x_i i} = \|f_{x_i(j)}\|_2^2. \quad (257b)$$

Den Vektor $V_{(k)}$ beschreibt man als:

$$\begin{aligned} V_{(k)} &= M^{-1} \cdot (G \cdot X_{(k-1)} + P_1 \cdot R_1(k)) \quad (R_2(k) = 0) \\ &= M^{-1} \cdot (G \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot R_1(k-j-1) + P_1 \cdot R_1(k)) \\ &= M^{-1} \cdot (G \cdot \sum_{i=1}^k \hat{A}^{i-1} \cdot \hat{B}_1 \cdot R_1(k-i) + P_1 \cdot R_1(k)). \end{aligned} \quad (258)$$

Der Impulsantwort-Vektor vom Filtereingang bis zu dem zu $V_{(k)}$ gehörigen Knoten ist

$$\begin{cases} f_{v(i)} = M^{-1} \cdot P_1 & (i = 0) \\ f_{v(i)} = M^{-1} \cdot G \cdot \hat{A}^{i-1} \cdot \hat{B}_1 & (i > 0) \end{cases}, \quad (259)$$

wobei $f_{v(i)} = [f_{v_1(i)}, f_{v_2(i)}, \dots]^T$ ist.

$$\begin{aligned} K_v &= \sum_{i=0}^{\infty} f_{v(i)} \cdot f_{v(i)}^T \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} M^{-1} \cdot G \cdot \hat{A}^{i-1} \cdot \hat{B}_1 (M^{-1} G \cdot \hat{A}^{i-1} \cdot \hat{B}_1)^T + M^{-1} \cdot P_1 \cdot (M^{-1} \cdot P_1)^T \\ &= M^{-1} \cdot G \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot \hat{B}_1^T \cdot \hat{A}^{Tj} \cdot G^T \cdot (M^{-1})^T + M^{-1} \cdot P_1 \cdot P_1^T \cdot (M^{-1})^T \\ &= M^{-1} \cdot G \cdot \hat{K}_x \cdot G^T \cdot (M^{-1})^T + M^{-1} \cdot P_1 \cdot P_1^T \cdot (M^{-1})^T \\ &= M^{-1} \cdot (G \cdot K_x \cdot G^T + P_1 \cdot P_1^T) \cdot (M^{-1})^T. \end{aligned} \quad (260)$$

Nach Hölder's Ungleichung sollte gelten:

$$\begin{aligned} |x_i(k)| &\leq \|f'_{x_i(j)}\|_p \cdot \|R_1(j)\|_q, \\ |v_i(k)| &\leq \|f'_{v_i(j)}\|_p \cdot \|R_1(j)\|_q, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1\right) \end{aligned}$$

wobei $f'_{x_i(j)}$, $f'_{v_i(j)}$ die entsprechende Impulsantwort ist, die zur Impulsantwort zwischen Filtereingang und Multiplizierer nach der Transformation

gehört.

Hierbei die l_q -Norm für $\{R_1(j)\}_0^k$ definiert durch

$$\|R_1(j)\|_q \triangleq \left\{ \sum_{j=0}^k |R_1(j)|^q \right\}^{1/q}$$

Das Ziel der Skalierung ist gemäß dem Kriterium in [88]

$$|X_i(k)| \leq M, \quad |V_i(k)| \leq M, \quad (M > 0).$$

Das bedeutet $\|f'_{x_i}(j)\|_p \cdot \|R_1(j)\|_q \leq M$,

$$\|f'_{v_i}(j)\|_p \cdot \|R_1(j)\|_q \leq M$$

und ferner $\|f'_{x_i}(j)\|_p \leq M/\mu$, (261a)

$$\|f'_{v_i}(j)\|_p \leq M/\mu, \quad (261b)$$

wobei $\|R_1(j)\|_q = \mu > 0$ ist.

Nimmt man $p = q = 2$ an, dann folgt aus (257), (261)

$$K'_{x_i i} = \|f'_{x_i}(j)\|_2^2 \leq M^2/\mu^2, \quad (262a)$$

$$K'_{v_i i} = \|f'_{v_i}(j)\|_2^2 \leq M^2/\mu^2. \quad (262b)$$

Aus Gl. (253), (254) und (257) ergibt sich

$$K'_x = T_x \cdot K_x \cdot T_x^T, \quad (263a)$$

aus Gl. (253), (254) und (260) ergibt sich

$$K'_v = T_v \cdot K_v \cdot T_v^T. \quad (263b)$$

Wenn T_x , T_v jeweils eine diagonale Matrix ist, so folgt

$$T_x = T_x^T = \text{Diag} [T_{x_{11}}, T_{x_{22}}, \dots],$$

$$T_v = T_v^T = \text{Diag} [T_{v_{11}}, T_{v_{22}}, \dots]$$

$$\text{und weiter} \quad K'_{x_{ii}} = K_{x_{ii}} \cdot T_{x_{ii}}^2, \quad (264a)$$

$$K'_{v_{ii}} = K_{v_{ii}} \cdot T_{v_{ii}}^2. \quad (264b)$$

Aus den Gl. (262), (264) ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{x_{ii}} \cdot T_{x_{ii}}^2 &\leq M^2 / \mu^2, \\ T_{x_{ii}}^2 &\leq \frac{M^2}{K_{x_{ii}} \cdot \mu^2}. \end{aligned} \quad (265a)$$

Ebenfalls ist

$$T_{v_{ii}}^2 \leq \frac{M^2}{K_{v_{ii}} \cdot \mu^2}. \quad (265b)$$

Hierbei kann man die Matrix K_x mit Hilfe der im vorigen Abschnitt angegebenen Methode berechnen. Nach einer Ableitung, die ähnlicher verläuft wie die Ableitung der Matrix W , erhält man

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j \cdot \hat{B}_1 \cdot \hat{B}_1^T \cdot \hat{A}^{Tj}, \\ &= \Gamma \cdot (\hat{P} + \Lambda \cdot \hat{P} \cdot \Lambda + \Lambda^2 \cdot \hat{P} \cdot \Lambda^2 + \dots) \cdot \Gamma^T, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma^{-1} \cdot \hat{A} \cdot \Gamma = \Lambda = \text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu]$,

$$\hat{P} = \Gamma^{-1} \cdot \hat{B}_1 \cdot \hat{B}_1^T \cdot (\Gamma^{-1})^T.$$

Daraus folgt

$$K_x = \Gamma \cdot \begin{bmatrix} \frac{\hat{\rho}_{11}}{1 - \lambda_1^2} & \frac{\hat{\rho}_{12}}{1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2} & \dots & \frac{\hat{\rho}_{1\nu}}{1 - \lambda_1 \cdot \lambda_\nu} \\ \frac{\hat{\rho}_{21}}{1 - \lambda_2 \cdot \lambda_1} & \frac{\hat{\rho}_{22}}{1 - \lambda_2^2} & \dots & \frac{\hat{\rho}_{2\nu}}{1 - \lambda_2 \cdot \lambda_\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{\rho}_{\nu 1}}{1 - \lambda_\nu \cdot \lambda_1} & \frac{\hat{\rho}_{\nu 2}}{1 - \lambda_\nu \cdot \lambda_2} & \dots & \frac{\hat{\rho}_{\nu\nu}}{1 - \lambda_\nu^2} \end{bmatrix} \cdot \Gamma^T. \quad (266)$$

Im vorigen Abschnitt wurde ein Beispiel angeführt, in dem ein Digitalfilter zwei Multiplizierer aufweist. Die Eingänge der Multiplizierer waren dabei jeweils als Knoten 3, Knoten 4 bezeichnet (Bild 7.3), die gerade zum Zustandsvektor $X_{(k-1)}$ gehören. Zur Ermittlung der Impulsantwort vom Filtereingang bis zu den Multiplizierern können wir K_x berechnen.

$$\begin{aligned}\hat{P} &= r^{-1} \cdot \hat{B} \cdot \hat{B}^T \cdot (r^{-1})^T \\ &= \frac{1}{r^2(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -re^{-j\theta} \\ -1 & re^{j\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -re^{-j\theta} & re^{j\theta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Gemäß Gl. (266) ist

$$\begin{aligned}K_x &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2} \cdot \begin{bmatrix} re^{j\theta} & re^{-j\theta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - r^2 e^{2j\theta}} & \frac{-1}{1 - r^2} \\ \frac{-1}{1 - r^2} & \frac{1}{1 - r^2 e^{-2j\theta}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} re^{j\theta} & 1 \\ re^{-j\theta} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{r^2}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos 2\theta)(1 - r^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 + r^2 & 2r \cos 2\theta \\ 2r \cos 2\theta & 1 + r^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Die Konstante μ ist gemäß Gl. (262) als die l_2 -Norm eines Eingangssignals definiert.

$$\mu = \|R_1(j)\|_2 = \left\{ \sum_{j=0}^k |R_1(j)|^2 \right\}^{1/2} \quad (267a)$$

Dabei ist k so bestimmt, daß $|X_1(k)|$ ein Maximum ist. Angenommen wird

$$\|R_1(\omega)\|_2 = \left\{ \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} |R_1(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}, \quad (267b)$$

wobei ω_s die Periode des Signals ist.

Wenn k innerhalb der ersten Periode des Signals liegt, können wir

$$k = \frac{2\pi F}{\omega_s} \quad (F - \text{Abtastfrequenz}) \text{ annehmen.}$$

Aus Parseval's Theorie ergibt sich von Gl. (267)

$$\|R_1(j)\|_2 = \|R_1(\omega)\|_2.$$

So folgt

$$\mu^2 = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} |R_1(\omega)|^2 d\omega \quad (268)$$

Für den Fall eines sinusförmigen Signals ist

$$\mu^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \hat{x}^2,$$

wobei $\hat{x}$ der Scheitelwert des Signals ist.

Die Konstante M ist normalerweise auch der Scheitelwert des Signals, d.h.

$$M = \hat{x}.$$

Dann sind $T_{x_{ii}}$, $T_{v_{ii}}$ für den Fall eines sinusförmigen Signals

$$T_{x_{ii}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot K_{x_{ii}}}}, \quad (269a)$$

$$T_{v_{ii}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot K_{v_{ii}}}}. \quad (269b)$$

Entsprechend den Zusammenhängen des Bildes 7.7b sollten die reziproken Multiplizierer n_i , $1/n_i$ und n_i/n_j , n_j/n_i durch Potenzen von 2 darstellbar sein.

Wenn $K_{ij} \cdot \mu^2 \leq M$ ist, bedeutet das in der originalen Struktur

$$\|f_i(j)\|_2^2 \leq \frac{M^2}{\mu^2},$$

d.h. es tritt keine Übersteuerung vor der Multiplikation auf. Deshalb ist dieser Skalierungsfaktor unnötig. Mit anderen Worten: wir können $T_{ij} = 1$ einsetzen. Das bedeutet, daß die Skalierungstechnik nur für einige Knoten (Äquivalenz von Adaptoren) durchgeführt werden muß.

Eine Übersteuerung könnte an den Knoten passieren, deren entsprechende l_2 -Norm durch

$$\|f_i(j)\|_2^2 \geq \frac{M^2}{\mu^2},$$

gegeben ist, weil

$$K_{x_{ij}} \geq \frac{M}{\mu}, \quad K_{v_{ij}} \geq \frac{M}{\mu}. \quad (270)$$

Da sich der Vektor $V_{(k)}$ Schrittweise bildet, wird an den meisten inneren Knoten keine Übersteuerung auftritt, so daß man die Skalierungsmethode nur an wenigen Knoten anwenden muß.

Nach der Skalierung muß man die Formel (Gl. (236)) für die Berechnung des Rauschens modifizieren:

$$\begin{aligned} W' &= (T_x^{-1})^T \cdot W \cdot T_x^{-1}, \\ \hat{F}' &= T_x \cdot \hat{F} \cdot T_N^{-1}, \\ \hat{L}'_2 &= \hat{L}_2 \cdot T_N^{-1}. \end{aligned} \quad (271)$$

Hierin sind W' , $\hat{F}'$, $\hat{L}'_2$ die Größen nach der Skalierung, W , $\hat{F}$, $\hat{L}_2$ die Größen vor der Skalierung sind.

Weil PWDF als orthogonale Digitalfilter repräsentiert werden können, werden die Orthogonalität und die Eigenschaft der Übertragungssymmetrie durch die Skalierung (innere Transformation) gefährdet, wenn auch die Übertragungsfunktion nicht beeinträchtigt wird. Deshalb sollte die Skalierungstechnik (innere Multiplikation mit reziproken Koeffizienten) so wenig wie möglich bei PWDF angewendet werden.

Eigentlich ist der Maximalwert $\text{Max}(K_{x_{ii}}, i = 1, 2, \dots)$ von PWDF kleiner als 1, so daß einerseits an den Ausgängen der meisten Adaptoren gar keine Übersteuerung auftreten kann, andererseits weichen die benötigten reziproken Multiplizierer-Koeffizienten nicht weit von Eins ab.

Bei Berücksichtigung sowohl des Rauschen, als auch der Aussteuerbarkeit hängt also die Berechnung des Dynamikbereiches stark von der Digitalfilterstruktur ab. Die Struktur von Wellendigitalfiltern eignet sich für die Unterdrückung des inneren Rauschens. Sie hat nur geringe Abweichung von der Struktur, die sich bei Berechnung ohne Berücksichtigung der Übersteuerungen ergibt, so daß die Diagonalelemente der Matrizen W, K_x alle kleiner als die von anderen Digitalfiltern werden. Besonders bei PWDF sind sie kleiner als 1.

7.3 Vergleich durch Simulation und theoretische Analyse

Bei der Dynamikanalyse durch Simulation wird die Meßordnung nach Bild 7.8 eingerichtet [102].

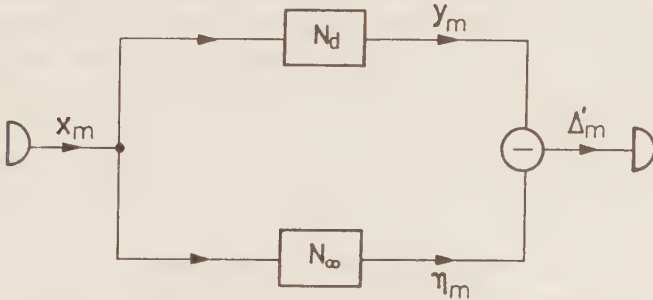


Bild 7.8 Bestimmung des minimisierten Rundungsrauschens

In Bild 7.8 ist N_∞ ein Digitalfilter ohne Signalquantisierung dargestellt, wobei also η_m die gleiche Genauigkeit wie der Rechner aufweist. N_d ist ein Digitalfilter mit Signalquantisierung. Hierbei werden die inneren Signale nach der Addition durch Betragsschneiden verarbeitet.

Das totale Rauschsignalverhältnis ist [102]

$$R^2 = R'^2 - (P/Q)^2, \quad R'^2 = N'/Q, \quad (272)$$

wobei $Q = \sum_{m=0}^M Y_m^2$, $P = \sum_{m=0}^M \Delta'_m \cdot Y_m$, $\Delta'_m = Y_m - \eta_m$, $N' = \sum_{m=0}^M \Delta_m'^2$ sind.

Die theoretische Ermittlung des Rauschsignalverhältnisses wird mit Hilfe eines Verfahrens im DOMAIN-Rechner durchgeführt, das im Abschnitt 7.1 vorgestellt wurde (Formeln (236), (239)).

Es werden 2 Wellendigitalfilter in Abzweigstruktur mit Leistungswellen bzw. Spannungswellen untersucht. Das Tiefpaßfilter 9. Ordnung ist eine digitale Realisierung des Katalogfilters 9. Ordnung C 090874. Das Bandpaßfilter 12. Ordnung ist digital realisiert durch eine Transformation des Tiefpaßfilter 6. Ordnung C 060529. Um die theoretisch errechneten Signalrauschverhältnisse mit den Simulationsergebnisse zu vergleichen, werden sinusförmige Eingangssignale angenommen. Die Frequenzen liegen im Durchlaßbereich des jeweiligen

Filters. Die Zahl der Abtastwerte, deren Abtastfrequenz 8k Hz beträgt wurde, bei der Simulation zu 16384 angenommen. Weiterhin wird die Wortlänge ohne Berücksichtigung des Vorzeichenbits angegeben. Der maximale zulässige Eingangssignalpegel wird so bestimmt, daß die Signale innerhalb des Digitalfilters nicht übersteuert werden. Die Beispiele werden unter Verwendung von Leistungswellen und Spannungswellen aufgeführt. Weil sich die Koeffizienten nach der Optimierung in zwei Fällen durch die Zahl der Koeffizienten und die Wortlänge unterscheiden, sollen diese zwei Fälle (PWDF, VWDF) nicht zur Beurteilung herangezogen werden.

Bei der Bestimmung des Signalrauschverhältnisses werden die folgenden 3 Fälle untersucht:

1. SNR_1 : Betragschneiden an allen Ausgängen der Adaptoren. Das entspricht einem Schneiden innerhalb der Adaptoren und gegebenenfalls einer Korrektur der Ausgangsgrößen um die Quantisierung Q.
2. SNR_2 : Schneiden innerhalb der Adaptoren (ohne Korrektur an den Ausgängen).
3. SNR_3 : Betragschneiden innerhalb der Adaptoren (ohne Korrektur an den Ausgängen).

Jeder n-Tor-Adaptor von PWDF ohne reflektiertes Tor weist 2n Multiplizierer auf. Dabei entstehen n verschiedene Koeffizienten. Deshalb brauchen wir nur diese n Koeffizienten in eine Tabelle (Tabelle 7.10) einzutragen.

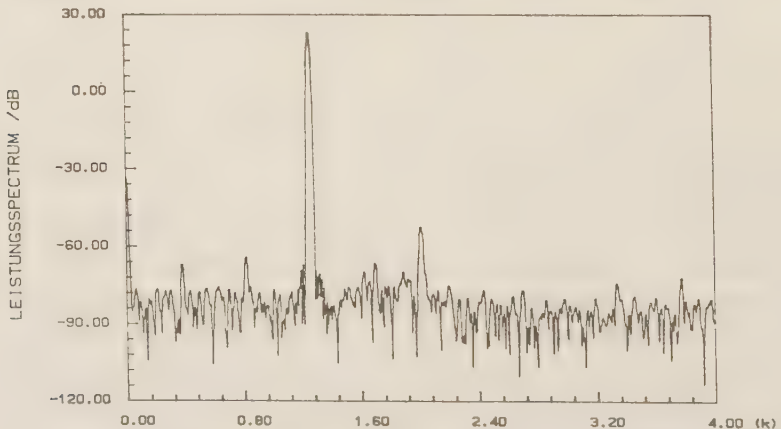


Bild 7.9 Ausgangssignal [$f_{\text{ein}} = 1.26\text{k}$, Tiefpaß 9. Ordnung]

Hierbei bedeutet $f_{(e_{in})}$ die Frequenz des Eingangssignals.

unter Verwendung von Leistungswellen			
Adaptor	Koeffizienten (12 Bit)		
1	.110000001001 (0.7521973)	.101010001011 (0.6589355)	
2	.100111001011 (0.6120605)	.110010100111 (0.7907715)	
3	.100100110011 (0.5749512)	.110100010111 (0.8181152)	
4	.100111010100 (0.6142578)	.110010100000 (0.7890625)	
5	.110011110001 (0.8088379)	.100101101000 (0.5878906)	
6	.000101000110 (0.07958984)	.111111110011 (0.9968262)	
7	.110111111010 (0.8735352)	.101001000100 (0.6416016)	.111010001001 (0.9084473)
8	.110111010101 (0.8645020)	.100000001010 (0.5024414)	
9	.000010110010 (0.04345703)	.111111111100 (0.9990234)	
10	.101110100110 (0.7280273)	.101011111000 (0.6855469)	
11	.110011110101 (0.8098145)	.100101100011 (0.5866699)	
12	.001101001100 (0.2060547)	.111110101000 (0.9785156)	
13	.110111010000 (0.8632813)	.100000010011 (0.5046387)	

(a)

unter Verwendung von Spannungswellen			
Adaptor	Koeffizienten (8 Bit)		
1	1.01101111 (-0.5664063)		
2	1.10100000 (-0.3750000)		
3	0.10010011 (0.5742188)		
4	1.10100000 (-0.3750000)		
5	1.01011000 (-0.6562500)		
6	0.00010100 (0.0781250)		
7	1.00111101 (-0.7617188)	1.00101101 (-0.8242188)	
8	1.01000000 (-0.7500000)		
9	0.00001011 (0.04296875)		
10	1.01111001 (-0.5273438)		
11	1.01011000 (-0.6562500)		
12	0.00110101 (0.2070313)		
13	1.01000001 (-0.7460938)		

(b)

Tabelle 7.10 Koeffizienten eines Tiefpasses 9. Ordnung

a) unter Verwendung von Leistungswellen

b) unter Verwendung von Spannungswellen

unter Verwendung von Leistungswellen		
Signalwortlänge : 15 Bit, $f_{\text{(ein)}} = 1.26\text{k}$		
Eingangssignalpegel : -0.76 dB		
Signalrauschverhältnis	theoretisch	simuliert
SNR_1	78.55113 dB	60.07939 dB
SNR_2	81.82609 dB	58.03023 dB
SNR_3	75.80548 dB	76.62612 dB

(a)

unter Verwendung von Spannungswellen		
Signalwortlänge : 15 Bit, $f_{\text{(ein)}} = 1.26\text{k}$		
Eingangssignalpegel : -2.58 dB		
Signalrauschverhältnis	theoretisch	simuliert
SNR_1	74.54491 dB	67.93981 dB
SNR_2	79.26537 dB	63.10743 dB
SNR_3	73.24478 dB	75.36643 dB

(b)

Tabelle 7.11 Signalrauschverhältnisse eines Tiefpasses 9. Ordnung

a) unter Verwendung von Leistungswellen

b) unter Verwendung von Spannungswellen

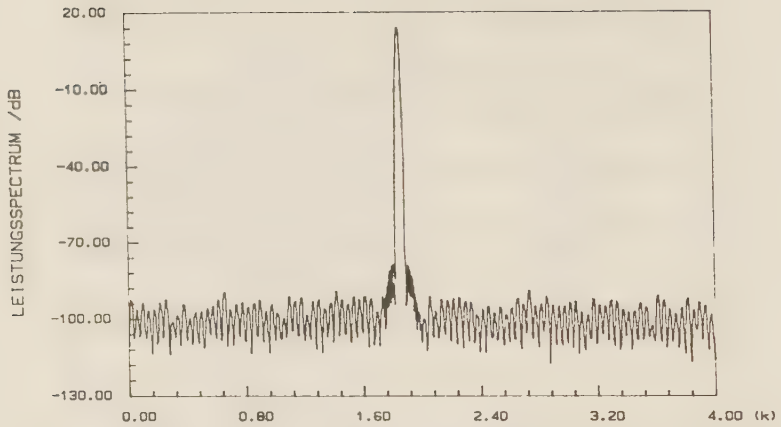


Bild 7.12a Eingangssignal [$f_{\text{ein}} = 1.86\text{k}$, Bandpaß 12. Ordnung]

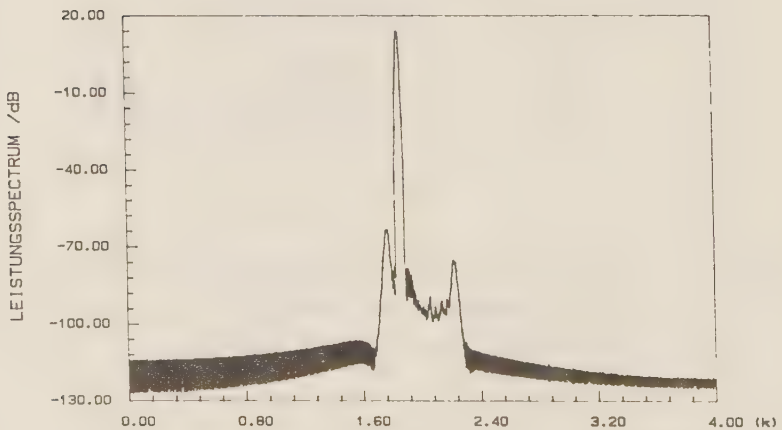


Bild 7.12b Ausgangssignal [$f_{\text{ein}} = 1.86\text{k}$, Bandpaß 12. Ordnung]

unter Verwendung von Leistungswellen				
Adaptor	Koeffizienten (13 Bit)			
1	.0111000100000 (0.4414063)	.1010001001110 (0.6345215)	.1010001001101 (0.6343994)	
2	.0111000111110 (0.4450684)	.1110010100111 (0.8953857)		
3	.1000011100000 (0.5273438)	.1101100110000 (0.8496094)		
4	.1011111010111 (0.7449951)	.1010101011000 (0.6669922)		
5	.1101100101111 (0.8494873)	.1000011100010 (0.5275879)		
6	.0101001101001 (0.3253174)	.1110110111011 (0.9290771)	.0110100011101 (0.4097900)	.1110110111010 (0.9289551)
7	.1011111010101 (0.7447510)	.1010101011010 (0.6672363)		
8	.1001001101001 (0.5753174)	.1101000101100 (0.8178711)		
9	.0111000110101 (0.4439697)	.1110010101100 (0.8959961)		
10	.1101000101100 (0.8178711)	.1001001101001 (0.5753174)		
11	.0010010110110 (0.1472168)	.1011001100001 (0.6993408)	.1011001100010 (0.6994629)	
12	.0110110000001 (0.4219971)	.1010010000100 (0.6411133)	.1010010000011 (0.6409912)	

(a)

unter Verwendung von Spannungswellen			
Adaptor	Koeffizienten (10 Bit)		
1	1.1100111000 (-0.1953125)	1.1001100100 (-0.4023438)	
2	1.1100110101 (-0.1982422)		
3	1.1011100011 (-0.2783203)		
4	1.0111001000 (-0.5546875)		
5	1.0100011101 (-0.7216797)		
6	1.1110010100 (-0.1054688)	1.0010001100 (-0.8632813)	1.1101010100 (-0.1679688)
7	1.0111001000 (-0.5546875)		
8	1.1010101101 (-0.3310547)		
9	1.1100110110 (-0.1972656)		
10	1.0101010011 (-0.6689453)		
11	1.1111101010 (-0.02148438)	1.1000001011 (-0.4892578)	
12	1.1101001100 (-0.1757813)	1.1001011010 (-0.4121094)	

(b)

Tabelle 7.13 Koeffizienten eines Bandpasses 12. Ordnung

a) unter Verwendung von Leistungswellen

b) unter Verwendung von Spannungswellen

unter Verwendung von Leistungswellen			
Signalwortlänge : 15 Bit, $f_{\text{(ein)}} = 1.9\text{k}$			
Signalrausch- verhältnis	Eingangs- signalpegel	theoretisch	simuliert
SNR_1	-23.0 dB	56.30511 dB	47.20518 dB
SNR_2	-15.0 dB	67.67747 dB	61.90876 dB
SNR_3	- 7.1 dB	69.55687 dB	68.04813 dB

(a)

unter Verwendung von Spannungswellen			
Signalwortlänge : 15 Bit, $f_{\text{(ein)}} = 1.9\text{k}$			
Signalrausch- verhältnis	Eingangs- signalpegel	theoretisch	simuliert
SNR_1	-25.0 dB	50.80326 dB	43.02048 dB
SNR_2	- 8.4 dB	70.69161 dB	50.39843 dB
SNR_3	- 8.4 dB	64.67102 dB	43.71861 dB

(b)

Tabelle 7.14 Signalrauschverhältnisse eines Bandpasses 9. Ordnung

a) unter Verwendung von Leistungswellen

b) unter Verwendung von Spannungswellen

Die bei der Rechnersimulation gewonnenen Ergebnisse zeigen, daß sich Wellendigitalfilter mit endlichen Signalwortlängen frei von Grenzyklus-schwingungen realisieren lassen, wenn die Operation Betragsschneiden in modifizierter Form verwendet wird. In diesem Fall wurde das Signalrausch-verhältnis SNR_1 gemessen und berechnet. Man kann zeigen, daß eine Reduzierung des Signalrauschverhältnisses eintritt. Weil sich der Maximalwert der Übertragungsfunktion des Filters $|H(\omega)| = 1$ durch die Koeffi-zientenquantisierung geändert hat und die Anzahl der Abtastwerte endlich sein darf, weicht das Signalrauschverhältnis bei der Simulation in einigen Fällen etwas vom theoretisch berechneten Signalrauschverhältnis ab. Im Fall des Betragsschneidens nach der Multiplikation stehen die meisten Siganlrausch-verhältnisse SNR_3 bei der Simulation, die nach Gl. (272) ermittelt wurden, den theoretischen Ergebnissen näher. Anderen Fällen zeigen jedoch große Abweichungen, wenn nämlich kein großer Unterschied zwischen den Größen R und R' in der Gleichung (272) existiert. Die maximal zulässigen Eingangs-signalpegel sind unterschiedlich bei den verschiedenen Simulationsfällen, besonders bei Bandpaßfiltern, der maximale zulässige Eingangssignalpegel hat sich im ersten und zweiten Fall stark abgesenkt.

Das theoretische Signalrauschverhältnis eines Tiefpasses 9. Ordnung ist bei Rundung

PWDF: 82.58609 dB,

VWDF: 81.84537 dB.

Das theoretische Signalrauschverhältnis eines Bandpasses 12. Ordnung ist bei Rundung

PWDF: 82.67741 dB,

VWDF: 79.09161 dB.

Unter Berücksichtigung der Aussteuerbarkeit sollten diese Werte entsprechend den Formeln von Abschnitt 7.2 modifiziert werden, während die Skalierer entsprechend innerhalb des Filters eingebaut werden.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit faßt die Ergebnisse der Untersuchung von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung zusammen. Als mathematisches Modell von Digitalfiltern wurde in dieser Arbeit die Struktur-Matrix vorgestellt, die sich besonders für die Zustandsdarstellung von Digitalfiltern eignet. Mit Hilfe dieser Struktur-Matrix wurden Untersuchungen von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung durchgeführt. Hauptsächlich befaßt sich die Arbeit mit den wesentlichen Eigenschaften von Wellendigitalfiltern mit Leistungswellen, die in engem Zusammenhang mit der Eigenschaft der Systemmatrix stehen. Die attraktiven Eigenschaften von PWDF - innere und äußere Stabilität unter endlicher Arithmetik und die Eigenschaft der Übertragungssymmetrie - dürften zu einer weiten zunehmenden Verwendung bei Aufgaben der Signalverarbeitung und Nachrichtenübertragung finden. Wegen der Entwicklung der Großintegration in der Mikroelektronik der letzten Jahre wurde wiederum die Untersuchung der Eigenschaften von Wellendigitalfiltern in Leistungswellen-Darstellung angeregt. Die Anzahl benötigter Multiplizierer spielt jedoch immer geringere Rolle bei der Massenproduktion der integrierten Schaltungen. Man kann nämlich einen besonderen Standard-Baustein-Typ in der Form eines Adaptors zur Fertigung eines PWDF benutzen. Obwohl jeder Multiplizierer eine neue Rauschquelle mit sich bringt, nimmt das Signalrauschverhältnis nicht zu. Hierbei spielt die Eigenschaft der Systemmatrix wieder eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung des Dynamikbereiches. Weiterhin ist der Eingangssignalpegel größer als bei anderer Filterdarstellungen oder der benötigte Skalierungsfaktor zur Aussteuerung weicht nur geringfügig von 1 ab.

Weil die Verwendung der Skalierung die Eigenschaft der Übertragungssymmetrie von PWDF gefährdet, wurde die Bestimmung des Skalierungsfaktors in dieser Arbeit nur theoretisch und prinzipiell behandelt, wobei die Ergebnisse bei der Simulation nicht mehr behandelt wurden. Für andere Digitalfilter werden diese Berechnung dagegen zur Optimierung des Dynamikbereichs unbedingt benötigt. Weitere Untersuchungen dieser Frage der Skalierungsfaktoren könnten auch bei PWDF möglicherweise interessante Ergebnisse erbringen.

Die theoretische Analyse und Realisierungsmethode, die auf der Struktur-Matrix basiert, gelten auch für andere Digitalfilter, z.B. für die Bedingungen der Realisierbarkeit. Die in der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Berechnungsformeln von Übertragungsfunktion, Empfindlichkeit, Dynamikbereich usw. können auch bei diesen anderen Digitalfiltertypen benutzt werden.

An dieser Stelle bin ich Herrn Prof. Dr. A. Fettweis für wertvolle Anregungen und Diskussionen, durch die er meine Arbeit gefördert hat, zu großem Dank verpflichtet.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Meerkötter für die Übernahme des Korreferats.

All denen, die mir beim Abfassung dieser Arbeit geholfen haben, möchte ich meinen herzlichen Dank aussprechen.

Danken möchte ich auch dem DAAD für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. Fettweis. "Digital filters related to classical filter networks," *Arch. Elek. Übertragung*, Bd. 25. S. 79-89, Feb. 1971.
- [2] A. Fettweis. "Wave digital filters: Theory and Practice," *Proc. IEEE*. Bd. 74, No. 2. S. 270-327, Feb. 1986.
- [3] K. Meerkötter, "Beiträge zur Theorie der Wellendigitalfilter," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, Feb. 1979.
- [4] A. Fettweis, "Filters met willekeurig gekozen dempingspolen en Tschebyschewkarakteristiek in het doorlaatgebied." *Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap*, Bd. 25, sec. 8, no. 5-6, S. 337-382, 1960.
- [5] A. Fettweis, "Pseudopassivity, sensitivity, and stability of wave digital filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Bd. CT-19, S. 668-673, Nov. 1972.
- [6] Shenke Zhang, "Vergleichende Untersuchungen von Wellendigitalfiltern, die unter Verwendung von Spannungswellen bzw. Leistungswellen hergeleitet werden," Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, 1985.
- [7] B. Hosticka, J. Büddefeld, and U. Kleine, "Power-wave digital filters using CORDIC adaptors," *Arch. Elek. Übertragung*, Bd. 39, S. 242-244, 1985.
- [8] A. Fettweis. "The role of passivity and losslessness in digital filter design," *Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, San Jose, California, USA, S. 448-451, Mai 5-7, 1986.
- [9] E. Avenhaus, "Zum Entwurf digitaler Filter mit minimaler Speicherwortlänge für Koeffizienten und Zustandsgrößen," *Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 13*. hrsg. von W. Schüßler. Univ. Erlangen-Nürnberg, 1971.
- [10] P. Dewilde, E. F. Deprettere, and C. V. K. Prabhakara Rao, "Orthogonal digital filters." in *Proc. 1984 IEEE Int Symp. on Circuits and Systems*. Bd. 1, S. 230-233, Montreal, Canada, Mai 7-10, 1984.
- [11] A. Fettweis and K. Meerkötter, "On adaptors for wave digital filters," *IEEE Trans. Acoust.. Speech. Signal Processing*. Bd. ASSP-23, S. 516-525, Dez. 1975.
- [12] L. Fraiture and J. J. Neirynck. "Theory of unit-element filters," *Rev. HF Tijdschrift*. Bd. VII, no. 12, S. 325-340, 1969.
- [13] A. Matsumoto Ed., *Microwave Filters and Circuits*. New York, NY: Academic Press, 1970.
- [14] H. -J. Michel, *Zweiter - Analyse mit Leistungswellen*, B. G. Teubner, Stuttgart 1981.

- [15] K. -A. Owenier, "Optimierung von Filtern, insbesondere von Wellendigitalfiltern mit verringerter Zahl an Multiplizierern," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, Juli 1977.
- [16] A. Fettweis, "Digital circuits and systems," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-31, S. 31-48, Jan. 1984.
- [17] A. Fettweis, "Some principles of designing digital filters imitating classical filter structures," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Bd. CT-18, S. 314-316, Mar. 1971.
- [18] A. Fettweis, "Wave digital filters," *Proc. Summer School on Circuit Theory* (Tále, Czechoslovakia, Sept. 1971), S. 11-1 to 11-10.
- [19] A. Sedlmeyer and A. Fettweis, "Digital filters with true ladder configuration," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Bd. 1, S. 5-10, Mar. 1973.
- [20] A. Fettweis, "Introduction to wave digital filters," Lecture Notes, Course on Digital Signal Processing, Sixth Europ. Conf. Circuit Theory and Design, Stuttgart, W. Germany, Sept. 1983.
- [21] A. Fettweis, "Scattering properties of wave digital filters," *Proc. Florence Sem. on Digital Filtering*, Florence, Italy: Theorema Edizioni, Sept. 1972, S. 1-8.
- [22] A. Sedlmeyer, "Structures for wave digital filters and their real time realization on a minicomputer," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, Juli 1974.
- [23] U. Ullrich, "Effektive Verfahren zur Ermittlung des Signalrauschverhältnisses von Digitalfiltern unterschiedlicher Struktur," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, Juli 1976.
- [24] W. Wegener, "Entwurf von Wellendigitalfiltern mit minimalem Realisierungsaufwand," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, W. Germany, Jan. 1980.
- [25] L. Gazsi, "Explicit formulas for lattice wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-32, S. 68-88, Jan. 1985.
- [26] A. Fettweis, H. Levin, and A. Sedlmeyer, "Wave digital lattice filters," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Bd. 2, S. 203-211, Juni 1974.
- [27] K. -A. Owenier, "Uniform recurrence formulae for the characteristic function of classical LC-filters, wave digital filters, and VIS-SC-filters with Tchebycheff passband," *Proc. 1982 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, Bd. 2, S. 337-340.
- [28] A. Fettweis, "Canonic realization of ladder wave digital filters," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Bd. 3, no. 4, S. 321-332, Dez. 1975.
- [29] K. Meerkötter, "Canonic realization of wave digital filters," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Bd. 5, no. 4, S. 395-402, Okt. 1977.

- [30] R. E. Crochiere and A. V. Oppenheim, "Analysis of linear digital networks," *Proc. IEEE*, Bd. 63, S. 581-595, Apr. 1975.
- [31] R. Lückner, H. Thielmann, "Strukturorientierte Matrizendarstellung zur Analyse und Synthese linearer zeitdiskreter Netzwerke," *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, Bd. 31, S. 26-32, 1977.
- [32] A. Lacroix, *Digital Filter*. München Wien, W. Germany: Oldenbourg, 1980.
- [33] S. J. Mason and H. J. Zimmermann, *Electronic Circuits, Signals and Systems*. New York, NY: Wiley, 1965.
- [34] A. Fettweis, "Some general properties of signal-flow networks," *Network and Signal Theory*, J. K. Skwirzynski and J. O. Scanlan, Eds. London, England: Peter Peregrinus, 1973, S. 48-59.
- [35] Shenke Zhang, "Programmierung zur Analyse und Simulation von WDF in Leistungswellen-Darstellung," *Tagungsbericht. erste GCI-Jahrestagung 86* (Bonn, W. Germany, Dez. 12-14, 1986).
- [36] A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis and Design*. New York, NY: McGraw-Hill, 1979.
- [37] A. Fettweis, "Principles of multidimensional wave digital filtering," Erschienen in: *Digital Signal Processing* (Herausgeber: J. K. Aggarwal), Western Periodicals, North Hollywood, 1979, Cal., S. 261-282.
- [38] G. Linnenberg, "Linear sampling in multidimensional digital signal processing," *Proc. Int. Conf. on Digital Signal Processing* (Florence, Italy, Sept. 1981), S. 102-108.
- [39] G. Linnenberg, "Über die diskrete Verarbeitung mehrdimensionaler Signale unter Verwendung von Wellendigitalfiltern," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, W. Germany, Jan. 1984.
- [40] A. Fettweis, "Realizability of digital filter networks," *Arch. Elek. Übertragung*, Bd. 30, S. 90-96, Feb. 1976.
- [41] W. Drews, "Entwurf und Aufbau digitaler Polyphasen - Filterbänke unter Verwendung von Wellendigitalfiltern," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, W. Germany, Feb. 1986.
- [42] S. N. Güllüoğlu, "Diskrete Optimierung von Wellendigitalfiltern, insbesondere von Brücken - Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren," Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, W. Germany, Feb. 1987.
- [43] G. O. Martens und K. Meerkötter, "On n-port adaptor for wave digital filters with applications to bridged - T filters," *Proc. 1976 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, München, April 1976, S. 514-517.
- [44] R. Nouta, "The Jaumann structure in wave digital filters," *Int. J. Circuits Theory Appl.*, Bd. 2, S. 163-174, Juni 1974.

- [45] A. Fettweis, Private Mitteilungen, Feb. 1987.
- [46] V. Belevitch. *Classical Network Theory*. San Francisco, CA: Holden-Day 1968.
- [47] W. Klein, *Mehrtortheorie*, Akademie Verlag Berlin 1976.
- [48] A. Fettweis, Vorlesungsskript: *Theoretische Elektrotechnik I*. Ruhr-Universität Bochum, W. Germany, 1980/1981.
- [49] A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer, *Digital signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [50] K. Meerkötter, "Incremental pseudo-passivity of wave digital filters," *Proc. 1st. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO-80)* (Lausanne, Switzerland. Sept. 1980), S. 27-32.
- [51] A. Fettweis and K. Meerkötter, "Suppression of parasitic oscillation in wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-22, S. 239-246, Mar. 1975.
- [52] A. Fettweis and K. Meerkötter, "On parasitic oscillations in digital filters under looped conditions," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-24, S. 475-481. Sept. 1977.
- [53] A. Fettweis, "Suppression of parasitic oscillations in multidimensional wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-25, no. 12, S. 1060-1066, Dez. 1978.
- [54] A. Fettweis, "Realisierungsprobleme von Digitalfiltern - durch Wortlängenbegrenzung bedingte Effekte sowie Filterstrukturen," *NTZ - Archiv*, Bd. 2, no. 12, S. 229-233, Dez. 1980.
- [55] J. E. Volder, "The CORDIC trigonometric computing technique," *IRE Trans. Electronic Comp.*, Bd. EC-8, no. 3, S. 330-334, Sept. 1959.
- [56] James F. Kaiser, "On the limit cycle Problem," *Proc. 1976 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*. München, April 1976, S. 642-645.
- [57] A. Fettweis and K. Meerkötter, "Suppression of parasitic oscillations in half-synchronic wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-23, no. 2, S. 125-126, Feb. 1976.
- [58] T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, and J. B. H. Peek, "Effects of quantization and overflow in recursive digital filters," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Bd. ASSP-24, S. 517-529, Dez. 1976.
- [59] C. Eswaran and Ganapathy, "On the stability of digital filters using the concept of generalized - immittance converter," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-28, S. 745-747, Juli 1981.
- [60] T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, and J. B. H. Peek, "On the stability of the forced response of digital filters with overflow

- nonlinearities," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-22, S. 692-696, Aug. 1975.
- [61] T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, and J. B. H. Peek, "Second - order digital filter with only one magnitude - truncation quantizer and having practically no limit cycles," *Electron. Lett.*, Bd. 9, S. 531-532, Nov. 1973.
- [62] T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, and J. B. H. Peek, "Frequency domain criteria for the absence of zero - input limit cycles in nonlinear discrete - time systems, with applications to digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-22, S. 232-239, Mar. 1975.
- [63] T. A. C. M. Claasen and L. Kristiansson, "Necessary and sufficient conditions for the absence of overflow phenomena in a second - order recursive digital filter," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Bd. ASSP-23, S. 509-515, Dez. 1975.
- [64] T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, and J. B. H. Peek, "A comparison between the stability of second - order digital filters with various arithmetick," *Proc. 1974 European Conf. Circuit Theory Design*, S. 354-358.
- [65] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford Univ. Press (Clarendon). London and New York, 1965.
- [66] J. H. Wilkinson, "Modern error analysis," *SIAM Rev.* 13, S. 548-568, 1971.
- [67] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.
- [68] J. H. Wilkinson, *Rounding Error in Algebraic Processes*. Notes on Applied Science No. 32. Her Majesty's Stationery Office, London; Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
- [69] J. C. Willems, *The Analysis of Feedback Systems*, Cambridge, MA: M. I. T. Press 1971.
- [70] C. W. Barnes and A. T. Fam, "Minimum norm recursive digital filters that are free of overflow limit cycles," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-24, S. 569-574, Okt. 1977.
- [71] A. Antoniou and M. G. Rezk, "A comparison of cascade and wave fixed-point digital filter structures," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-27, no. 12, S. 1184-1194, Dez. 1980.
- [72] T. Aboulnasr and M. M. Fahmy, "Spatial-domain design of overflow-stable 2-D digital filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Bd. CAS-34, no. 3, S. 301-304, Mar. 1987.
- [73] A. Fettweis, "Reciprocity, interreciprocity, and transposition in wave digital filters", *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Bd. 1, S. 323-337, Dez. 1973.

- [74] A. Fettweis, "Network-theory approach to designing lossless (orthogonal) digital filter structures. *Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*. Philadelphia, PA, Bd. 1, S. 154-156A, 4-7 Mai 1987.
- [75] A. Fettweis, "On sensitivity and roundoff noise in wave digital filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, Bd. ASSP-22, S. 383-384, Okt. 1974.
- [76] K. -A. Owenier, "A general method for efficient computation of sensitivities in wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*. Bd. CAS-30, S. 750-757, Okt. 1983.
- [77] R. E. Crochire, "A new statistical approach to the coefficients word length problem for digital filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. Bd. CAS-25, no. 3, S. 190-196, Mar. 1975.
- [78] R. Hermeling und, R. Lücker, "Analyse und Empfindlichkeitsberechnung zeitdiskreter Systeme." *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*. Bd. 30, S. 192-196, 1976.
- [79] S. Colonna, U De Julio und M. Salerno, "Determination of sensitivity functions of digital filters," *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Bd. CT-19, S. 538-539, Sept. 1972.
- [80] R. E. Crochire and A. V. Oppenheim, "Analysis of linear digital networks," *Proc. IEEE*. Bd. 63, S. 581-594, Apr. 1975.
- [81] A. Fettweis, "Passive and lossless digital filter structures," *Proc. 2nd Nordic Symp. on VLSI in Computers and Communications*, 12 Seiten, Linköping, Sweden, Juni 1986.
- [82] G. C. Temes and H. J. Orchard, "First-order sensitivity and worst case analysis of doubly terminated reactance two-ports," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Bd. CT-20, S. 567-571, Sept. 1973.
- [83] G. Kubin, "Wave digital filters: valtage, current, or power waves?" *Proc. 1985 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing* (Tampa, FL, USA, Mar. 1985), Bd. 1, S. 69-72.
- [84] E. Avenhaus, "On the design of digital filters with coefficients of limited word length." *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* Bd. AU-20, no. 3, S. 206-212, Aug. 1972.
- [85] K. -A. Owenier, "Optimization of wave digital filters with reduced number of multipliers," *Arch. Elek. Übertragung.*, Bd. 30, S. 387-393, 1976.
- [86] A. Fettweis, "On the connection between multiplier word length limitation and roundoff noise in digital filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Bd. CT-19, S. 486-491, Sept. 1972.
- [87] A. Fettweis, "Roundoff noise and attenuation sensitivity in digital filters with fixed-point arithmetic," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Bd.

CT-20, S. 174-175, Mar. 1973.

- [88] L. B. Jackson, "On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Bd. 49, S. 159-184, Feb. 1970.
- [89] L. B. Jackson, "Roundoff noise bounds derived from coefficient sensitivities for digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-23, S. 481-485, Aug. 1976.
- [90] S. Barntt and C. Storey, *Matrix Methods in Stability Theory*, London: Thomas Nelson and Sons LTD, 1970.
- [91] K. Renner, and S. C. Gupta, "Reduction of roundoff noise in wave digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-21, no. 2, S. 305-310, Mar. 1974.
- [92] U. Ullrich, "Roundoff noise and dynamic range of wave digital filters," *Signal Processing*, Bd. 1, S. 45-64, Jan. 1979.
- [93] W. Wegener, "On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word length and optimal dynamic range," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-25, S. 1091-1098, Dez. 1978.
- [94] S. Y. Hwang, "Comments on 'Reduction of roundoff noise in wave digital filters'," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-22, S. 764, Sept. 1975.
- [95] S. Y. Hwang, "Roundoff noise in state-space digital filtering - A general analysis," *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, Bd. ASSP-24, S. 256-262, Juni 1976.
- [96] S. Y. Hwang, "Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, Bd. ASSP-25, S. 273-281, Aug. 1977.
- [97] R. Redheffer, "Remarks on a Paper of Taussky," *J. Algebra*, Bd. 2, S. 42-47, 1965.
- [98] R. A. Smith, "Matrix equation $XA + BX = C$," *SIAM J. Appl. Math.*, Bd. 16, no. 1, S. 198-201, 1968.
- [99] C. T. Mullis and R. A. Roberts, "Synthesis of minimum roundoff noise fixed-point digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Bd. CAS-23, S. 551-562, Sept. 1976.
- [100] C. T. Mullis and R. A. Roberts, "Roundoff noise in digital filters: frequency transformations and invariants," *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, Bd. ASSP-24, S. 538-550, Dez. 1976.
- [101] W. L. Mills, C. T. Mullis, and R. A. Roberts, "Digital filter realizations without overflow oscillations," *IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Processing*, Bd. ASSP-26, S. 334-338, Aug. 1978.
- [102] A. Fettweis, "On the evaluation of roundoff noise in digital filters,"

IEEE Trans. Circuits Syst., Bd. CAS-22, S. 896, Nov. 1975.

- [103] H. J. Orchard, "Loss Sensitivities in singly and doubly terminated Filters," *IEEE Trans. Circuits. Syst.*, Bd. CAS-26, S. 293-297, Mai 1979.
- [104] A. Fettweis, "Passivity and losslessness in digital filtering," *Arch. Elek. Übertragung*, Bd. 42, S. 1-8, Jan. 1988.

Lebenslauf

11.01.1948	geboren in Shanghai/China
1955 - 1961	Grundschule in Shanghai
1961 - 1967	Mittelschule in Shanghai
1973 - 1977	Studium der Elektrotechnik und Automatisierung an der Tongji-Universität Shanghai
1977 - 1982	Assistentin am Lehrstuhl für elektronische Technik der Elektrotechnik-Fakultät an der Tongji-Universität (Digitale Schaltungstechnik, Grundlagen der Elektrotechnik)
Okt. 1982 - März 1983	Deutschkurs im Goethe-Institut Schwäbisch Hall
seit April 1983	DAAD-Stipendiatin am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Ruhr-Universität Bochum

